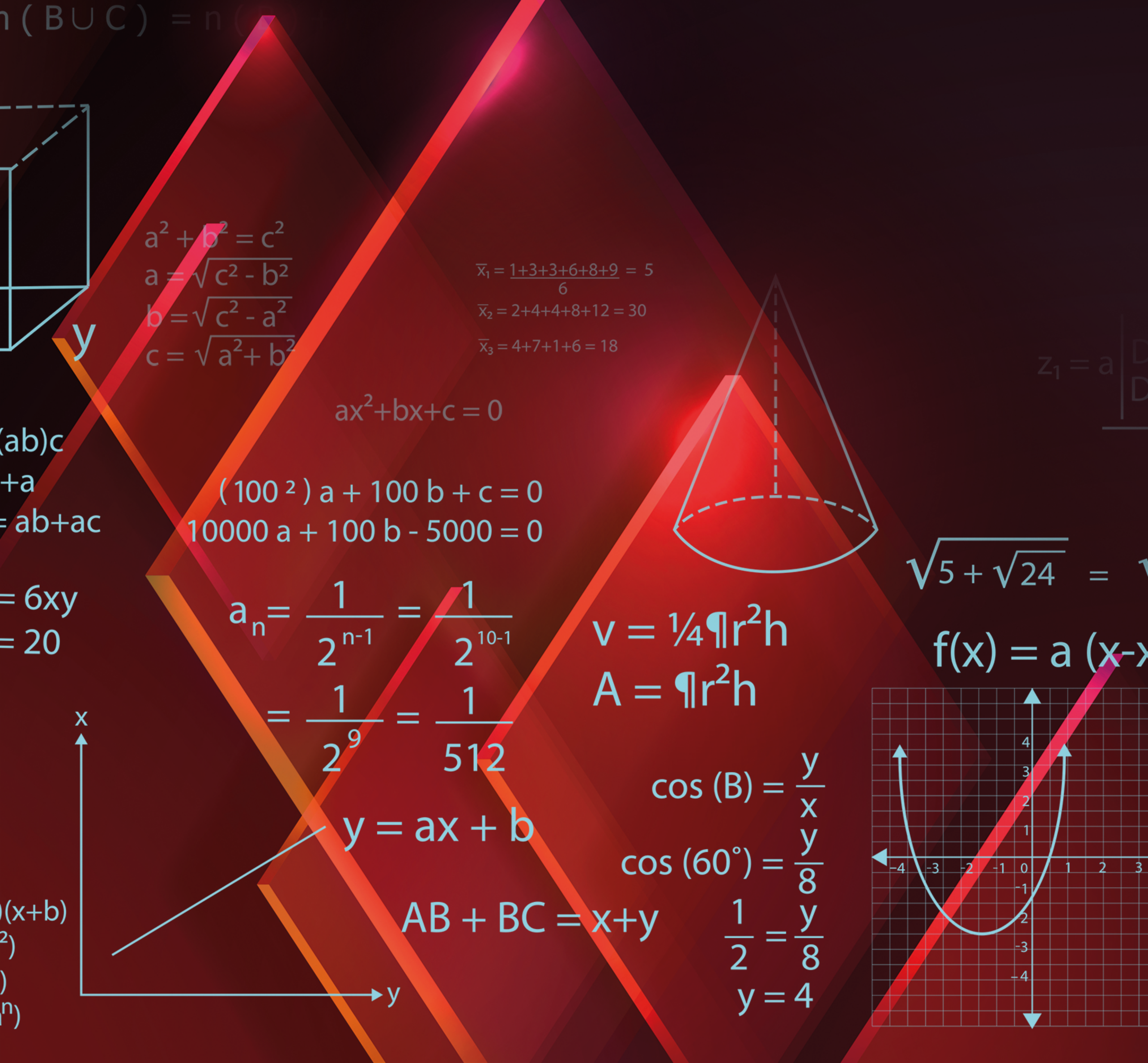
TÜBİTAK

Türkiye Cumhuriyeti
SANAYİ VE TEKNOLOJİ BAKANLIĞI

MATEMATİK

23. ULUSAL ORTAOKUL
MATEMATİK OLİMPİYATI
BİRİNCİ AŞAMA SINAV
SORU VE ÇÖZÜMLERİ

2018



TÜRKİYE BİLİMSEL VE TEKNOLOJİK ARAŞTIRMA KURUMU
BİLİM İNSANI DESTEK PROGRAMLARI BAŞKANLIĞI

ULUSAL MATEMATİK OLİMPİYATLARI SORU ve ÇÖZÜMLERİ

Ankara

Nisan 2019

1. $s(\widehat{ACB}) = 90^\circ$ olan bir ABC dik üçgeninde $[BC]$ kenarının orta noktası D dir. B noktasından AD doğrusuna indirilen dikmenin ayağı E olmak üzere, $|AD| = 4$ ve $|DE| = 1$ ise, $|AB|$ kaçtır?

Cevap: $2\sqrt{7}$. $s(\widehat{ACB}) = s(\widehat{AEB}) = 90^\circ$ olduğundan A, C, E, B noktaları çemberseldir. Bu çemberde D noktasının kuvveti ele alındığında $|BD| = |DC| = 2$ bulunur. ACD üçgeninde Pisagor teoreminden $|AC| = 2\sqrt{3}$ elde edilir. ABC üçgeninde Pisagor teoreminden ise $|AB| = 2\sqrt{7}$ olur.

2. Üç basamaklı $A0B, A1B, A2B, A3B, A4B, A5B, A6B, A7B, A8B, A9B$ sayılarının hiçbiri 11 ile tam bölünemiyorsa $A + B$ toplamının alabileceği kaç farklı değer vardır?

Cevap: 1. 11 ile bölünme kuralından $A + B \not\equiv 0, 1, 2, \dots, 9 \pmod{11}$ olduğu görülür. Yani $A + B \equiv 10 \pmod{11}$ olmalıdır. Öte yandan $0 < A + B < 20$ olduğundan $A + B = 10$ olmalıdır, alabileceği tek değer budur.

3. Bir su deposu, çatladığı günden itibaren her $k \geq 1$ için k-inci gün içindeki suyun $k + 1$ de birini sızdırıyor. 27-inci günün sonunda depoda 60 litre su bulunuyorsa, 15-inci günün sonunda depoda kaç litre su vardır?

Cevap: 105. k-ıncı günün sonunda depodaki su miktarı x_k olsun. O zaman k-ıncı günün başında depoda x_{k-1} litre su vardır ve bu suyun $k + 1$'de biri sızınca geriye $x_{k-1}\frac{k}{k+1}$ litre su kalır. Demek ki her k için $x_k = x_{k-1}\dfrac{k}{k+1}$. O zaman

$$x_{27} = \frac{27}{28} \cdot \frac{26}{27} \cdot \frac{25}{26} \cdots \frac{16}{17} x_{15}$$

elde edilir. Buradan da $x_{15} = \dfrac{60 \cdot 28}{16} = 105$ olur.

4. 18 özdeş kırmızı ve 9 özdeş beyaz top 4 farklı kutuya her kutuda en az bir beyaz top bulunmak ve her kutudaki kırmızı topların sayısı beyaz topların sayısından en az 2 fazla olmak koşuluyla kaç farklı şekilde yerleştirilebilir?

Cevap: 224. Her kutuya 2 kırmızı top yerleştirip bir beyaz ve bir kırmızı toptan oluşan 9 çift oluşturalım. Önce bu çiftleri ve daha sonra da kalan bir kırmızı topu kutulara dağıtalım:

$$\binom{5 + 4 - 1}{4 - 1} \cdot 4 = 224.$$

5. Bir ABC üçgeninin $[BC]$ ve $[AB]$ kenarları üzerinde sırasıyla D ve E noktaları alınıyor. AD ve CE doğrularının kesişimi P olmak üzere, $|BE| = 3|AE|$, $3|BD| = 2|DC|$ ve BPC üçgeninin alanı 9 ise, ABC üçgeninin alanı kaçtır?

Cevap: 14. BEC üçgeninde AD kesenine göre Menelaus teoreminden

$$\frac{AE}{EB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CP}{PE} = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{CP}{PE} = 1$$

Yani CP/PE=1/6 olur. BPC ve BEP üçgenlerinin yükseklikleri eştir, buradan Alan(BEP)=3/2 olur. CEB ve CEA üçgenlerinin yükseklikleri de eştir. Buradan Alan(CEA)=7/2 yani Alan(ABC)=14 olur.

6. $\dfrac{2n+13}{n^2+n+1}$ ifadesinin tam sayı olmasını sağlayan kaç n tam sayısı vardır?

Cevap: 6. $n^2+n+1 | 2n+13$ olduğundan $n^2+n+1 \leq |2n+13|$ buradan da

$$n^2+n+1 \leq -2n-13 \qquad (1)$$

veya

$$n^2+n+1 \leq 2n+13 \qquad (2).$$

elde ediliyor. (1) den çözüm gelmiyor. (2) den $n^2-n-12 \leq 0 \Rightarrow (n-4)(n+3) \leq 0 \Rightarrow -3 \leq n \leq 4$. Bu durumda $n = -3, -2, -1, 0, 1, 4$ değerleri koşulu sağlıyorlar.

7. a ve b pozitif gerçel sayılar olmak üzere, $\dfrac{a-7}{b} + \dfrac{b+7}{a} = 2$ ise, $a-b$ nin alabileceği kaç farklı değer vardır?

Cevap: 2. Verilen ifade $(a-b)^2 - 7(a-b) = 0$ a denktir. Buradan da (a-b) 0 veya 7 olabilir.

8. Toplam ağırlıkları 100 gram olan 22 taşın herhangi 12 sinin toplam ağırlığı en az 40 gram ise bu taşların en ağır olanı en çok kaç gram olabilir?

Cevap: 30. En ağır taş 30 gramdan ağır ise, kalanlardan en hafif 12 sinin toplamı $< 70 \cdot \frac{12}{21} = 40$ olacaktır. En ağır taş 30 gram olabiliyor: diger taşların her biri $\frac{70}{21} = \frac{10}{3}$ olursa koşullar sağlanıyor.

9. $s(\widehat{BAC}) = 60°$, $|AB| = 6$ ve $|AC| = 9$ olan bir ABC üçgeni veriliyor. ABC üçgeninin çevrel çemberinin küçük BC yayının orta noktası D ise, $|BD|$ kaçtır?

Cevap: $\sqrt{21}$. B den AC ye çizilen dikme ayağı E olsun. $|AE| = 3, |BE| = 3\sqrt{3}$, $|BC| = 3\sqrt{7}$ olur. ABDC kirişler dörtgeninde $\angle BDC = 120°$ ve BDC üçgeni ikizkenardır. Buradan $|BD| = \sqrt{21}$.

10. Hiçbir asal sayının karesine tam bölünmeyen ve tüm pozitif tam bölenlerinin toplamı 96 olan kaç pozitif tam sayı vardır?

Cevap: 4. $n = p_1p_2 \cdots p_k$ olsun. n sayısının tüm pozitif tam bölenlerinin toplamı $(p_1 + 1)(p_2 + 1) \cdots (p_k + 1) = 96$ olur. 96 sayısı birer eksikleri birbirinden farklı asallar olan çarpanlar şeklinde 4 türlü yazılabilir:

$$96 = 3 \cdot 4 \cdot 8 = 3 \cdot 32 = 4 \cdot 24 = 12 \cdot 8.$$

Karşılık gelen n sayıları $42, 62, 69, 77$ dir.

11. Aslı, beş günlük kamp sürecinde içinde 99 soru bulunan bir kitaptaki soruların bir kısmını çözüyor. Her $n = 1, 2, 3, 4$ için, Aslı'nın n-inci gün çözdüğü soru sayısı $(n + 1)$-inci günün sonunda kitaptaki çözülmemiş soru sayısına eşitse, Aslı'nın üçüncü gün çözdüğü soru sayısı en çok kaç olabilir?

Cevap: 18. Aslının n. gün çözdüğü ve n. gün sonunda kalan soru sayı ikililerini 5. günden başlayarak yazalım: 5. gün: (a,b), 4. gün: (b,a+b), 3. gün: (a+b,2b+a), 2. gün: (a+2b,2a+3b), 1. gün: (2a+3b,3a+5b). O zaman $5a + 8b = 99$ ve buradan $(a, b) = (15, 3)$ ve $(a, b) = (7, 8)$ durumları geliyor. Üçüncü gün çözülen soru sayısı $a + b$ olduğundan cevap 15+3=18.

12. 2018 kişinin katıldığı bir etkinlikte herhangi dört kişiden en az biri diğer üç kişinin her biri ile tokalaşmıştır. Bu etkinlikte birbirleriyle tokalaşmayan kişi ikilisi sayısı en çok kaç olabilir?

Cevap: 3. A ve B kişileri birbirleriyle tokalaşmamış olsun. C ve D kişileri alalım. O zaman bu dört kişiden en az biri diğer 3 kişiyle tokalaşmıştır. Sonuç olarak C ve D birbirleriyle tokalaşmıştır. Benzer şekilde bir E kişisi A ve B den biri ile tokalaşmamışsa, bu üç kişi dışında herkes E,A,B ile tokalaşmıştır. O zaman sadece EA,EB,AB ikilileri tokalaşmamış olabilirler.

13. r yarıçaplı bir çemberin içine, her birinin yarıçapı 9 olan ve herhangi ikisi kesişmeyen dört çember çizilebiliyorsa, r nin alabileceği en küçük tam sayı değeri nedir?

Cevap: 22. 9 yarıçaplı dört çemberin merkezleri bir kenarı 18 olan bir karenin köşeleri olduğu vakit, merkezi bu karenin merkezi olan $9 + 9\sqrt{2}(\approx 21.73)$ yarıçaplı çember dört çemberi de içerir. O halde r nin alabileceği en küçük tam sayı değer 22'dir.

14. 1 den büyük hiçbir tam sayının 5-inci kuvveti ile tam bölünmeyen bir pozitif tam sayının pozitif bölen sayısı aşağıdakilerden hangisi olabilir?

Cevap: 2015. $n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{a_i}$ sayısının 1'den büyük hiçbir doğal sayının 5-inci kuvveti ile bölünmemesi için gerek ve yeter koşul her i için $a_i \leq 4$ olmasıdır. Böyle bir sayının pozitif bölen sayısının ($(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_k)$ çarpımının) 5'ten büyük bir asal böleni olamaz. Cevap: $5^2 \cdot 3^4 = 2015$.

15. a ve b gerçel sayılar olmak üzere, $x(2x+a) < b$ eşitsizliğini sağlayan x gerçel sayılarının kümesi $(-1, 2018)$ açık aralığı ise, $a+b$ kaçtır?

Cevap: 2. $b - x(2x+a)$ sayısı, x in -1 ile 2018 arası değerleri için pozitif, -1 den küçük değerleri için ise pozitif olmadığı için $x = -1$ iken 0 olmalı. O halde $b - (-1)(2(-1) + a) = 0$ bulunur. Buradan da $a + b = 2$ elde edilir.

16. Duvardaki 4×4 satranç tahtasının 6 birim karesi, her satırda ve her sütunda tek sayıda işaretlenmiş birim kare olmak koşuluyla, kaç farklı şekilde işaretlenebilir?

Cevap: 160. Üç satırda 1, bir satırda 3 birim kare işaretlenecektir. Benzer şekilde üç sütunda 1, bir sütunda 3 birim kare işaretlenecektir. 3 birim karesi işaretlenmiş satır ve sütunu belirleme sayısı $4 \cdot 4$ tür. Bu ikilinin kesişimindeki birim kare işaretlenmemişse bir, işaretlenmişse $3 \cdot 3$ seçenek bulunuyor. Sonuç olarak $16(1+9) = 160$ farklı seçenek elde ediyoruz.

17. Bir ABC üçgeninin $[BC]$ ve $[AC]$ kenarları üzerinde sırasıyla D ve E noktaları alınıyor. $|EC| = 1$, $|EA| = 2$, $|AB| = 3$, $|BD| = \sqrt{3}$ ve $s(\widehat{BAD}) = s(\widehat{EDC})$ ise, $|DE|$ kaçtır?

Cevap: $\sqrt{2}$. $AB = AC$ olduğundan $s(\angle ABD) = s(\angle ACD) = s(\angle ADE)$ ve buradan da $s(\angle ADC) = s(\angle AED)$ buluruz. Buradan $\Delta AED \sim \Delta ADC$ ve $|AD|^2 = |AE| \cdot |AC| = 6$ olur. Yani $|AD| = \sqrt{6}$ bulunur. $|AD|^2 + |BD|^2 = |AB|^2$ olduğundan $AD \perp BC$, $DE \perp AC$ ve $|DE| = \sqrt{2}$ olarak bulunur.

18. 6 basamaklı bir pozitif tam sayının $7, 11$ ve 13 ile bölümünden kalan 1 dir. Bu sayıda en çok kaç farklı rakam olabilir?

Cevap: 5. Bu sayının 1 eksiği 7,11 ve 13 ile tam bölünür, yani 1001 ile tam bölünür, yani $ABCABC$ şeklinde olmalıdır. O halde bu sayının kendisi şu formlardan birinde olmalıdır: $ABCABC', AB9AB'0, A99A'00$. Yani bu sayıda en fazla 5 farklı rakam bulunabilir.

19. a ve b gerçel sayılar olmak üzere, $\left(a+\dfrac{1}{b}\right)\left(b+\dfrac{1}{a}\right) = 7$ ise, $\left(a+\dfrac{1}{b}\right)\left(b-\dfrac{1}{a}\right)$ ifadesinin alabileceği farklı değerlerin toplamı kaçtır?

Cevap: 0. $\left(a+\dfrac{1}{b}\right)\left(b+\dfrac{1}{a}\right) = x$ ve $\left(a+\dfrac{1}{b}\right)\left(b-\dfrac{1}{a}\right) = y$ olsun. $ab + 1/(ab) = x - 2$ ve $ab - 1/(ab) = y$ olur. Buradan da $|y| = \sqrt{(x-2)^2 - 4}$ elde edilir. $x > 4$ için y nin alabileceği değerler $\pm\sqrt{(x-2)^2 - 4}$ olduğundan cevap 0 olur.

20. İki öğrenci tahtaya çizilmiş bir düzgün n-genin üzerinde sırayla hamle yaparak bir oyun oynuyorlar. Sırası gelen oyuncu n-genin daha önce sayı yazılmamış bir köşesine istediği bir pozitif tam sayıyı yazıyor. Tüm köşelere sayı yazıldıktan sonra öğretmen her kenarın ortasına bu kenarın iki ucundaki sayıların toplamını yazıyor. Öğretmenin yazdığı bu n sayı arasında birbirine eşit olan sayılar varsa oyunu başlayan oyuncu kazanıyor. Oyun $n = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$ değerleri için birer kez oynanırsa başlayan oyuncu bu oyunlardan kaçını kazanmayı garantileyebilir?

Cevap: 7, oyuna başlayan oyuncu $n = 4$ durumunun dışındaki tüm durumlarda kazanıyor. $n = 3$ durumunda oyuna başlayan oyuncu her iki hamlesinde aynı sayı yazıp kazanıyor. $n = 4$ durumunda ikinci oyuncu oyuna başlayan oyuncunun ilk yazdığı a sayısının karşısındaki köşeye $b \neq a$ yazarak oyunu kazanıyor. Diğer durumlarda oyuna başlayan oyuncu aralarında bir köşe olan iki köşeye herhangi bir a sayısı yazarak oyunu kazanıyor.

21. Dar açılı bir ABC üçgeninde iç teğet çember $[BC]$, $[AC]$ ve $[AB]$ kenarlarına sırasıyla D, E ve F noktalarında teğettir. $|AE| = 3$ ve $|BD|\cdot|CD| = |BC|+3$ ise, $s(\widehat{BAC})$ kaçtır?

Cevap: $60°$. $|BC| = a$, $|CA| = b$, $|AB| = c$, $2u = a + b + c$ olsun. $|AF| = u - a$, $|BF| = u - b$, $|CD| = u - c$ olur. Soruda verilenlerden $u - a = 3$ ve $(u - b)(u - c) = a + 3 = u$ buluruz. İç teğet çemberin yarıçapı r olsun. $r = \sqrt{\dfrac{(u-a)(u-b)(u-c)}{u}} = \sqrt{3}$ olur. İç teğet çemberin merkezi I olmak üzere $|FI| = \sqrt{3}$ ve $|AF| = 3$ olduğundan $s(\angle FAI) = 30°$ ve buradan da $s(\angle BAC) = 60°$ olur.

22. Kaç n pozitif tam sayısı için $n^{\frac{18}{n}}$ tam sayıdır?

Cevap: 9. $n = 1$ dışındaki çözümleri bulalım. m bir tam kuvvet olmayacak şekilde $n = m^k$ olsun. O halde $\dfrac{18k}{m^k}$ tam sayı olmalıdır. $k = 1$ için, $m|18$ bulunur ve $m = 2, 3, 6, 18$ ($n = 2, 3, 6, 18$) elde edilir. $k = 2$ için, $m^2|36$ ve $m|6$ elde edilir ve buradan $m = 2, 3, 6$ ($n = 4, 9, 36$) bulunur. $k = 3$ için, $m^3|54$ ve böylece $m = 3$ ($n = 27$) olduğu görülür. $k \geq 4$ için çözüm gelmediğini görmek zor değildir. Dolayısıyla tüm çözümler $1, 2, 3, 4, 6, 9, 18, 27, 36$ toplam 9 tanedir.

23. Yaşları tam sayılar olan Ali ve Burcu, 99 şekeri yaşlarıyla doğru orantılı olarak paylaşıyorlar. Eğer paylaşım yaşlarıyla ters orantılı olarak yapılsaydı, Ali 9 şeker daha fazla alacaktı. Buna göre, Ali'nin yaşı aşağıdakilerden hangisi olabilir?

Cevap: 10. Ali'nin yaşı a, Burcu'nun yaşı b olsun. Paylaşımda Ali $99a/(a + b)$ şeker alır. Ters orantıllı olarak paylaşım yapılsaydı Ali $99b(a + b)$ şeker alacaktı. O halde $99(b - a)/(a + b) = 9$ elde edilir. Buradan $b/a == 6/5$ olduğu görülür. Bu da a nın 5 ile tam bölünmesini gerektirir. $a = 10$ için $b = 12$ olur ve soru koşulları sağlanır.

24. 10 tablonun sergilendiği bir sergiye katılan 23 öğrencinin her biri iki tablo beğeniyor. Herhangi iki öğrencinin ortak bir tablo beğendiği her durumda en az k öğrenci tarafından beğenilmiş bir tablo bulunuyorsa, k nin alabileceği en büyük değer nedir?

Cevap: 16. 23 öğrenciyi sırasıyla 8, 8 ve 7 kişiden oluşan A, B ve C gruplarına ayıralım ve A grubundaki öğrenciler 1. ve 2., B grubundaki öğrenciler 1. ve 3., C grubundaki öğrenciler 2. ve 3. tabloları beğensinler. Bu durumda koşullar sağlanıyor ve her tablo en fazla 16 öğrenci tarafından beğeniliyor. Demek ki $k \leq 16$. Şimdi her durumda en az 16 öğrenci tarafından beğenilen bir tablo olduğunu gösterelim. Her öğrenci (T_1, T_2) tablolarını beğenmişse ispat tamamlanmış oluyor. Bir öğrenci (T_1, T_2), bir diğer öğrenci ise T_2, T_3 tablolarını beğenmişse kalan her öğrenci $(T_1, T_2), (T_2, T_3)$ veya (T_1, T_3) tablo ikililerinin birini beğenmiştir. Dolayısıyla öğrenciler sadece üç tablo beğenmişler. Toplam $23 \cdot 2 = 46$ beğenme olduğundan en az bir tablo en az $\lceil \frac{46}{3} \rceil = 16$ öğrenci tarafından beğenilmiştir.

25. $s(\widehat{ABC}) = 13°$ ve $s(\widehat{ACB}) = 26°$ olan bir ABC üçgeninin $[BC]$ kenarı üzerinde bir D noktası alınıyor. $|AC| = 1$ ve $|BD| = 2$ ise, $s(\widehat{DAC})$ kaçtır?

Cevap: $51°$. BD kenarı üzerinde $|AP| = 1$ olacak biçimde bir P noktası alırsak $s(\angle APC) = s(\angle ACB) = 26°$ ve buradan da $s(\angle BAP) = s(\angle ABP) = 13°$ olacağından $|BP| = |DP| = |AP| = 1$ ve böylece $s(\angle BAD) = 90°$ ve $s(\angle DAC) = 51°$ olarak bulunur.

26. Bir n pozitif tam sayısının a ile bölümünden kalan b ve b ile bölümünden kalan $a - 2$ olacak şekilde $a > 2$ ve b pozitif tam sayıları varsa, n ye *özel* sayı diyelim. Aşağıdakilerden hangisi özel değildir?

Cevap: 129. Bir bölme işleminde kalan bölenden küçük olduğundan $b \leq a-1$ ve $a-2 \leq b-1$ eşitsizlikleri elde edilir. Buradan da $b = a-1$ olduğu görülür. O zaman bir sayının özel olması için gerek ve yeter şart sayının 1 fazlasının bir $a \geq 3$ için $a(a-1)$ ile bölünmesidir. $129 + 1 = 130 = 2 \cdot 5 \cdot 13$ şartı sağlamaz.

27. a, b, c ve d iki basamaklı pozitif tam sayılar olmak üzere, Ahmet (a, b, c, d) dörtlüsünü aklında tutuyor. Bu dörtlüyü bulmak isteyen Betül her hamlede bir (x, y, z, t) gerçel sayı dörtlüsünü Ahmet'e söylüyor ve Ahmet de $ax + by + cz + dt$ toplamını hesaplayıp Betül'e söylüyor. Betül k hamlede a, b, c ve d sayılarını bulmayı garantileyebiliyorsa, k nin alabileceği en küçük değer nedir?

Cevap: 1. Betül $x = 1$, $y = 100$, $z = 10000$ ve $t = 1000000$ sayılarını seçip tek hamlede a, b, c, d yi buluyor.

28. 3×3 satranç tahtasının birim karelerinden birine 1, birine 2, ..., birine 9 sayısı yazılmıştır. Tahtadaki birim karelerden oluşan her 2×2 karenin üzerindeki dört sayının toplamı aynı T sayısına eşitse, T nin alabileceği en büyük ve en küçük değerlerin farkı kaçtır?

Cevap: 8. İlk satır a,b.c, 2. satır d,e,f, 3. satır g,h,i olsun. O zaman

$$10 = 1 + 2 + 3 + 4 \le a + c + g + i \le 6 + 7 + 8 + 9 = 30$$

Genelliği bozmadan $a + i \ge 5$ olsun. O zaman $2T = 45 + e - a - i \le 49$ ve $T \le 24$. Benzer şekilde $a + i \le 15$ olsun. O zaman $2T = 45 + e - a - i \ge 31$ ve $T \ge 16$. T sayısı 24 ve 16 olabiliyor: (a,b,c) = (5,7,2), (d,e,f) = (3,9,6), (g,h,i) = (4,8,1) durumunda $T = 24$, (a,b,c) = (5,3,8), (d,e,f) = (7,1,4), (g,h,i) = (6,2,9) durumunda $T = 16$ oluyor. Cevap $24 - 16 = 8$.

29. $n \ge 23$ olmak üzere, $A_1A_2 \dots A_n$ düzgün n-geninde A_1A_5, A_2A_7 ve A_3A_{23} doğruları ortak bir noktada kesişiyorsa, n kaçtır?

Cevap: 38. A_1A_5 ile A_2A_7'nin kesişimi P olsun. $\alpha = \frac{180^\circ}{n}$ olmak üzere, $s(\widehat{A_2A_1P}) = 3\alpha$ ve $s(\widehat{A_3A_2P}) = 4\alpha$ olduğu görülür. $s(\widehat{A_1PA_2})$ açısı A_1A_2 ve A_5A_7 yaylarının toplamı olduğundan $s(\widehat{A_1PA_2}) = \alpha + 2\alpha = 3\alpha$ elde edilir. Böylece $A_1A_2 = A_2P$ ve $A_2P = A_2A_3$ olduğu görülür. O zaman $s(\widehat{A_2A_3P}) = 90 - 2\alpha = \frac{n-4}{2}\alpha$ bulunur. Öte yandan $s(\widehat{A_2A_3A_{23}}) = (n+2-23)\alpha$. O zaman A_3, P ve A_{23}'ün doğrusal olması için gerek ve yeter koşul $(n-4)/2 = n-21$ olmasıdır. O zaman cevap $n = 38$.

30. m ve n pozitif tam sayılar olmak üzere $2^m + 2^n + 5$ tam kare ise, $m + n$ toplamının alabileceği kaç farklı değer vardır?

Cevap: 2. $m \ge 3$ ve $n \ge 3$ olursa $\pmod 8$ den çelişki. Yani en az biri 3 ten küçüktür. $n \le m$ olsun. $n = 1$ ise $a = 2^{\mathrm{m}} + 7$ den $m = 1$ için tam kare olur ama $m \ge 2$ için $\pmod 8$ den çelişki. $n = 2$ ise $2^{\mathrm{m}} + 9 = k^2$ buradan da $2^{\mathrm{m}} = (k-3)(k+3)$ sağdaki çarpanların farkı 6 ve ikisi de sadece 2 ye bölündüğünden $k - 3 = 2$ olmalıdır ve $m = 4$ olur. Buradan tüm çözümler: (1,1), (2,4) ve (4,2).

31. a ve b pozitif gerçel sayılar olmak üzere, $\dfrac{a^3+b^2+2ab^2(a+1)}{ab(a+b)}$ sayısının alabileceği en küçük değer nedir?

Cevap: $2\sqrt{2}$. AGO'dan $a^3+2ab^2 \geq 2\sqrt{2}a^2b$ ve $b^2+2a^2b^2 \geq 2\sqrt{2}ab^2$ olacağından $a^3+b^2+2ab^2(a+1) \geq 2\sqrt{2}ab(a+b)$ olur. Eşitlik durumu $a=1/\sqrt{2}$, $b=1/2$ iken sağlanır.

32. $1, 2, \ldots, 13$ sayıları bir çember etrafına yerleştiriliyor ve art arda bulunan her sayı üçlüsünün toplamı hesaplanıyor. Bu 13 toplamın en küçüğü en çok kaç olabilir?

Cevap: 19. 13 dışındaki sayılardan oluşan dört üçlünün toplamı 78 olduğundan bu üçlülerden en az biri 19 dan büyük olmayacaktır. 19 için örnek: 1,7,11,3,8,9,10,4,6,12,2,5,13.