TÜBİTAK

Türkiye Cumhuriyeti
SANAYİ VE TEKNOLOJİ BAKANLIĞI

MATEMATİK

20. ULUSAL ORTAOKUL
MATEMATİK OLİMPİYATI
BİRİNCİ AŞAMA SINAV
SORU VE ÇÖZÜMLERİ

2015

TÜRKİYE BİLİMSEL VE TEKNOLOJİK ARAŞTIRMA KURUMU
BİLİM İNSANI DESTEK PROGRAMLARI BAŞKANLIĞI

ULUSAL MATEMATİK OLİMPİYATLARI SORU ve ÇÖZÜMLERİ

Ankara

Nisan 2019

1. Bir ABC üçgeninde $|AB| = |AC|$ ve $s(\widehat{A}) = 80$ derecedir. Bu üçgenin B açısının iç açıortayı ile C açısının dış açıortayı D noktasında kesişmektedirler. $s(\widehat{ADC})$ kaç derecedir?

Cevap: 65°. Bir üçgende iki dış açıortay ve bir iç açıortay noktadaş olduğundan AD doğrusu A açısının dış açıortayıdır. İkizkenarlıktan $s(\widehat{BCA}) = 50°$ dir. O zaman $s(\widehat{CAD}) = 50°$ ve $s(\widehat{ACD}) = 65°$ dir ve buradan da $s(\widehat{ADC}) = 65°$ olduğu görülür.

2. Bir grup çocuk, içinde kırmızı ve beyaz şekerler bulunan bir torbadaki kırmızı şekerlerin $\frac{4}{11}$ ini ve beyaz şekerlerin $\frac{11}{17}$ sini yedikten sonra torbada her iki renkten eşit sayıda şeker kaldıysa, yenilen beyaz şekerlerin sayısı ile yenilen kırmızı şekerlerin sayısı arasındaki fark en az kaç olabilir?

Cevap: 53. Kalan kırmızı şekerlerin oranı $7/11$, beyaz şekerlerin oranı ise $6/17$ dir. a çift şeker kaldıysa, başlangıçta $11a/7 + 17a/6 = 185a/42$ şeker vardı. Buradan a en az 42 olur. Bu durumda başlangıçtaki kırmızı şekerlerin sayısı 66 ve beyaz şekerlerin sayısı 119 olup ve yenilen kırmızı ve beyaz şeker sayıları sırasıyla 24 ve 77 olur. Cevap: $77 - 24 = 53$.

3. Bir pozitif tam sayıdan rakamları toplamı çıkarıldığında, bu sayının rakamları çarpımı elde ediliyorsa bu sayıya *iyi sayı* diyelim. Kaç iyi sayı vardır?

Cevap: 9. n'nin basamak sayısı en az 2'dir. $n = \overline{AB}$ ise $A + B + AB = 10A + B$ den $B = 9$ geliyor. $19, 29, \ldots 99$ sayıları koşulları sağlıyor. Basamak sayısı 3 ise, $n = \overline{ABC}$, ve $A + B + C + ABC = 100A + 10B + C$ den $99A + 9B = ABC$ elde ederiz. $BC < 99$ olduğundan çözüm yoktur. Basamak sayısı 3'den fazla ise, benzer şekilde çözüm yoktur.

4. Bir tahtada başlangıçta 10 kırmızı, 15 mavi, 20 yeşil ve 25 siyah nokta vardır. Her hamlede 3 farklı renkli nokta seçilip siliniyorsa, yapılabilecek hamle sayısı en fazla kaç olabilir?

Cevap: 22. Her hamlede kırmızı, mavi ve yeşil noktalardan ikisi silinecek. O zaman en fazla $\lfloor \frac{10+15+20}{2} \rfloor = 22$ hamle yapılabilir. 22 hamle için bir örnek verelim: önce 3 kez kırmızı, yeşil ve siyah nokta, daha sonra 7 kez mavi, yeşil ve siyah nokta silersek tahtada 12 mavi, 13 yeşil ve 15 siyah nokta kalır. Bu durumda 12 hamle daha yaparak toplamda 22 hamleye ulaşıyoruz.

5. Bir dışbükey çokgenin iç açılarının derece ile ölçülmüş değerleri birbirlerinden farklı tam sayılardır. Bu çokgenin 3 tane iç açısı sırasıyla 55, 65 ve 75 derece olduğuna göre bu çokgenin en fazla kaç kenarı olabilir?

Cevap: 8. Bu açıların dış açı ölçüleri $125, 115, 105$ derecedir. Diğer dış açıların toplamı $360 - 125 - 115 - 105 = 15$ derecedir. Birbirinden farklı pozitif tam sayıların toplamı 15 ise, burada en çok 5 sayı olabilir: $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$.

Yani köşe sayısı en çok 8 dir. Elbette cevabı kesinleştirmek için bu açılara sahip bir çokgenin çizilebildiğini belirtmek gerekir.

6. A ve B birer rakam olmak üzere, on tabanına göre yazılımı $2015AB$ olan sayı 71 ile tam bölünüyorsa, $A+B$ kaçtır?

Cevap: 15. $201500 + AB \equiv 2 + AB \pmod{71}$, o halde $AB = 69 \Rightarrow A + B = 15$. Not: $2838 \times 71 = 201498$.

7. İki kavanozdan birinde 2, diğerinde 5 litre şekerli su bulunuyor. Her iki kavanozdan aynı anda t'şer litre şekerli su alınıp yer değiştiriliyor. Bu işlem sonucunda kavanozlardaki, başlangıçta farklı olan şeker oranları eşitlendiyse, t kaçtır?

Cevap: 10/7. İşlem sonucunda şeker oranları eşitlendiği için her iki kavanozda eşit oranda birinci ve ikinci kavanoz suyu bulunmak zorundadır. O zaman bu oran oran 2/5 olacaktır. Demek ki birinci kavonozdaki şeker oranı işlem sonucunda $(2-t)/t = 2/5$ olacaktır ve buradan da $t = 10/7$ olur.

8. $1, 2, \ldots, 20$ sayıları ile numaralandırılmış 20 top başlangıçta rastgele dizilmiştir. Her işlemde aralarında en az l adet top bulunan iki topun yerlerini değiştirerek birkaç işlem sonucunda topları numaralarına göre artan sırada dizebiliyorsak, l nin alabileceği en büyük değer nedir?

Cevap: 9. $l \geq 10$ olursa başlangıçta soldan onuncu sırada olan topun bulunduğu pozisyon değiştirilemez ve dolayısıyla toplar her durumda artan sırada dizilemez. $l = 9$ durumunda her top hem ilk hem de son pozisyona getirilebilir ve daha sonra da gereken yere yerleştirilebilir.

9. Köşeleri, alanı 4 olan bir $ABCD$ dışbükey dörtgeninin kenarları üzerinde ve kenarları da AC ve BD köşegenlerine paralel olan bir paralelkenarın alanı en çok kaç olabilir?

Cevap: 2. AB, BC, CD, DA kenarları üzerinde X, Y, Z, T noktaları bulunmak üzere $XY \parallel AC \parallel ZT$ ve $XT \parallel BD \parallel YZ$ diyebiliriz. $\dfrac{|BX|}{|BA|} = \dfrac{|BY|}{|BC|} = \dfrac{|DT|}{|DA|} = \dfrac{|DZ|}{|DC|} = t$ ve $\dfrac{|AX|}{|AB|} = \dfrac{|AT|}{|AD|} = \dfrac{|CZ|}{|CD|} = \dfrac{|CY|}{|CB|} = 1 - t$ diyelim. $\text{Alan}(XYZT) = 8 \cdot t \cdot (1-t) \leq 2$ olur. $t = \dfrac{1}{2}$, yani orta noktalar eşitliği sağlar.

10. n bir pozitif tam sayı olmak üzere, $2014n^2 + 2018n + 2015$ sayısının birler basamağındaki rakamın alabileceği kaç farklı değer vardır?

Cevap: 3. $2014n^2 + 2018n + 2015$ sayısının birler basamağı ile $4n^2 + 8n + 5 = (2n+2)^2 + 1$ sayısının birler basamağı aynıdır. Dolayısıyla birler basamağının alabileceği değerler bir çift sayının karesinin 1 fazlasının birler basamağının alabileceği değerlerdir. Bu değerler de 1,5 ve 7 dir.

11. $6^x - 3(3^x + 2^x) - 3^x + 12 = 0$ denklemini sağlayan x gerçel sayılarının toplamı kaçtır?

Cevap: 3. Verilen denklem $(3^x - 3)(2^x - 4) = 0$ denklemine denktir. Bu denklemin çözümleri de $x = 1$ ve $x = 2$ dir.

12. $1, 2, \ldots, 100$ sayıları tahtaya, her biri 10 eleman içeren 10 gruba ayrılarak yazılmıştır. Önce her grubun en küçük 2 elemanı ve daha sonra da kalan 80 sayının en küçük 10 tanesi siliniyor. Tahtada kalan 70 sayının en küçüğü en az kaç olabilir?

Cevap: 15. Cevap S olsun. Her grubun en küçük 2 elemanını silme işleminde 1 ve 2 sayılar siliniyor. İkinci işlemden sonra ise $1, 2, \ldots, 12$ sayılarının hiçbiri tahtada bulunmuyor: $S \geq 13$. Tahtada S den daha küçük en az 12 sayı var. Bu sayılardan en az ikisi en fazla dokuzu S ile aynı gruptadır. Demek ki ilk hamle sonucunda S den daha küçük en az 4 eleman silinecek. İkinci hamlede de S den küçük olan 10 sayı sinindiği nedeniyle $S \geq 15$ elde ediyoruz. $S = 15$ için örnek: İlk grup $1, 2, \ldots, 10$, 2. grup $11, 12, \ldots, 20$ sayılarından oluşup diger gruplar rastgele düzenlenirse iki işlem sonucunda tahtada kalan en küçük sayı 15 olur.

13. Bir ABC üçgeninde iç açıortayların kesişme noktası I dır. I noktasından geçen ve BC ye paralel olan doğru AB ve AC kenarlarını sırasıyla K ve L noktalarında kesmektedir. $|AB| = 9, |AC| = 15, |BC| = 8$ olduğuna göre $|KB|$ kaçtır?

Cevap: $\frac{9}{4}$. AI ile BC nin kesişimi D olsun. İç açıortay teoreminden $|BD| = 8 \cdot 9/(9 + 15) = 3$ bulunur. ABD üçgeninde uygulanan iç açıortay teoreminden ise $|AI|/|ID| = 9/3 = 3$ elde edilir. $KL \parallel BC$ olduğundan $|AK|/|KB| = |AI|/|ID| = 3$ tür. Dolayısıyla $|KB| = 9/4$ olduğu görülür.

14. Pozitif tam sayılardan oluşan bir kümede, herhangi iki elemanın 1 den büyük bir ortak böleni vardır, fakat herhangi üç elemanın 1 den büyük ortak böleni yoktur. 2015 sayısı bu kümede bulunuyorsa, bu küme en çok kaç elemanlı olabilir?

Cevap: 4. $2015 = 5 \cdot 13 \cdot 31$ dir. Kümede 2015 in dışındaki sayılardan en çok biri 5 ile, en çok biri 13 ile ve en çok biri 31 ile bölünebilir. Her bir sayı $5, 13, 31$ den az birine bölüneceğinden kümede en çok $3+1 = 4$ adet sayı bulunabilir. Örnek: p, q, r birbirlerinden ve $5, 13, 31$ den farklı üç asal sayı olmak üzere $\{2015, 5pq, 13pr, 31qr\}$ sağlar, yani cevap 4 olur.

15. Evden okula bisikletle giden Ali, yolun ilk yarısını a, ikinci yarısını da b hızıyla giderek bu yolu 23 dakikada tamamlayabiliyor. Dönüşte de aynı yolu kullanan Ali, 10 dakika a, 10 dakika da b hızıyla giderek evine varabiliyor. Buna göre, $\dfrac{a}{b}$ nin alabileceği değerlerin toplamı kaçtır?

Cevap: 13/5. Ali yolun ilk yarısını x dakikada, ikinci yarısını y dakikda gitmiş olsun. O zaman $x+y=23$ ve $ax=by=(10a+10b)/2=5(a+b)$ dir. O halde $x=5(a+b)/a$ ve $y=5(a+b)/b$ dir. $a/b=t$ dersek $x+y=5(1+1/t)+5(1+t)=23$ ve dolayısıyla $t^2-\frac{13}{5}t+1=0$ elde edilir. Bu denklemin iki kökü de pozitif gerçel sayıdır ve toplamları 13/5 tir.

16. Yan yana dizili 6 adet kartın her birinin üzerine mutlak değeri 3 ten küçük olan bir tam sayı yazılacaktır. Yazılan sayıların çarpımı 1 den büyük olmak koşuluyla, bu işlem kaç farklı şekilde yapılabilir?

Cevap: 2016. Kullanabileceğimiz sayılar $2,1,0,-1,-2$. Çarpımın 1 den büyük olması için 0 kullanmamalıyiz, 2 ve -2 den en az birini kullanmalıyız ve çift sayıda negatif sayı kullanmalıyız. Şimdi kullanabileceğimiz sayılar $2,1,-1,-2$ olduğundan tüm durumların sayısı 4^6, ancak bunların 2^6 tanesinde hiç 2 ve -2 kullanılmıyor, kalan durumların yarısında çarpım negatif, yarısında pozitif. Cevap: $\dfrac{4^6-2^6}{2}=2016$ olur.

17. Köşegenleri P noktasında kesişen bir $ABCD$ dışbükey dörtgeninde $|AB|=3, |BC|=13, |CD|=22, |DA|=18$ olduğuna göre P noktasının, bu dörtgenin kenarlarının orta noktalarına olan uzaklıkları toplamı nedir?

Cevap: 28. $3^2+22^2=9+484=493=324+169=18^2+13^2$ olduğundan AC ve BD köşegenleri P de dik kesişir. Dolayısıyla P nin bir kenara uzaklığı o kenar uzunluğunun yarısıdır. Sonuç olarak cevap $3/2+13/2+22/2+18/2=28$ dir.

18. Kaç farklı m pozitif tam sayısı için, n^2+3 ve $(n+2)^2+2$ sayılarının her ikisini de m nin katı yapan bir n tam sayısı bulunabilir?

Cevap: 4. $m|n^2+3$ ve $m|(n+2)^2+2=n^2+4n+6$ olmalı. O zaman $m|n^2+4n+6-(n^2+3)=4n+3$ ve $m|(4n+3)(4n-3)=16n^2-9$. Öte yandan $m|16(n^2+3)=16n^2+48$. Sonuç olarak $m|16n^2+48-(16n^2-9)=57$. Demek ki m sayısı $57=3\cdot 9$ un bir böleni olmalı. $3|n$ ise her iki sayı da 3 ile bölünür. $n\equiv 4 \pmod{19}$ iken her iki sayı da 19 ile bölünür. Dolayısıyla, örneğin $n=42$ için her iki sayı da 57 nin katı olur. İstenen şartı sağlayan m sayıları 1,3,19 ve 57 dir.

19. Kaç farklı c gerçel sayısı için $2x^2+y^2+1=cx(y+1)$ denklemini sağlayan tam olarak bir (x,y) gerçel sayı ikilisi vardır?

Cevap: 2. İfadenin tek bir x çözümünün olabilmesi için $f(x)=2x^2-c(y+1)x+y^2+1$ parabolünün diskriminantı 0 olmalıdır. Bu durumda $\Delta_1=c^2(y+1)^2-8(y^2+1)=(c^2-8)y^2+2c^2y+c^2-8=0$ olur. İfadenin tek bir y çözümünün olabilmesi için $g(y)=(c^2-8)y^2+2c^2y+c^2-8$ parabolünün de diskriminantı 0 olmalıdır. Bu durumda $\Delta_2=4c^4-4(c^2-8)^2=64(c^2-4)=0$ ve buradan da $c=\pm 2$ olur. $c=2$ için tek çözüm $(1,1)$ ve $c=-2$ için tek çözüm $(-1,1)$ olur.

20. Sonsuz bir satranç tahtasının 2015 adet birim karesi kırmızıya, geriye kalanlar ise beyaza boyanmıştır. Ortak kenara sahip olup farklı renklere boyanmış olan birim kare ikililerinin sayısı en az kaç olabilir?

Cevap: 180. Bize sorulan kırmızı birim karelerden oluşan şeklin çevresinin alabileceği en küçük değerdir. Kırmızı birim karelerden oluşan bu şekil bir veya birkaç bağlantılı parçadan meydana gelebilir. Parçalardan birini ele alalım. Bu parçadaki kırmızı birim kare sayısı m olsun ve bu parçayı içeren en küçük dikdörtgen $a \times b$ olsun. Bu parçanın çevresi en az $2 \cdot (a+b) \geq 4\sqrt{ab} \geq 4\sqrt{m}$ dir. Parçalardaki birim kare sayıları $m_1, m_2, \ldots, m_k$ ise çevre en az $4 \cdot (\sqrt{m_1} + \ldots + \sqrt{m_k}) \geq 4\sqrt{m_1 + \ldots + m_k} = 4\sqrt{2015} > 179$ dur. Yani çevre en az 180 olmalı. Gerçekten de 45×45 lik bir karenin içindeki 2025 birim kareden sol alt kısımdaki 10 tanesi harıç geriye kalanları kırmızıya boyarsak çevre 180 olur.

21. O_1 ve O_2 merkezli iki çember A ve B noktalarında kesişmektedirler. B noktasından geçen bir doğru çemberleri sırasıyla C ve D noktalarında kesmektedir. $|CB| = |BD|, s(\widehat{CAD}) = 90^\circ$ ve O_1 ve O_2 merkezli çemberlerin yarıçapları sırasıyla 3 ve 4 olduğuna göre $|O_1O_2|$ kaçtır?

Cevap: 5. CAD dik üçgen ve B noktası $[CD]$ nin orta noktası olduğundan $|AD| = |BC| = |BD|$ dir. Dolayısıyla ABC ve ABD üçgenleri ikizkenar üçgenlerdir ve merkezleri B açısına ait açıortaylar üzerindedir. O halde $s(\widehat{O_1BO_2}) = 90^\circ$ olur ve buradan da $|O_1O_2| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ bulunur.

22. $1 + 7 + \ldots + 7^n$ sayısının 60 ile tam bölünmesini sağlayan en küçük n doğal sayısı kaçtır?

Cevap: 11. $1 + 7 + \ldots + 7^n = (7^{n+1} - 1)/6$ olduğundan $6 \cdot 60 = 360 | 7^{n+1} - 1$ olmalı. $360 = 5 \cdot 8 \cdot 9$ dur. (mod 5) te incelediğimizde 7 nin kuvveti 4 ile bölünüyorsa 1 e denk oluyor. (mod 8) de ise 7 nin çift kuvvetleri 1 e denktir. (mod 9) da ise 7 nin kuvveti 3 ile bölünüyorsa 1 e denktir. Dolayısıyla $n+1$ sayısı 12 ile tam bölünmeli. O halde n en az 11 olabilir.

23. $xy + yz + zx = 1$ ve $x, y, z \geq 0$ koşullarını sağlayan her (x, y, z) gerçel sayı üçlüsü

$$1 + \frac{z}{x+y} \geq K(1 + z^2)$$

eşitsizliğini de sağlıyorsa, K gerçel sayısının alabileceği en büyük değer nedir?

Cevap: 1. $z = 0$ alırsak $K \leq 1$ olur. $K = 1$ için ifade $xy + yz + zx = 1 \geq xz + yz$ eşitsizliğine denk olacağından K en çok 1 olabilir.

24. Aslı her hamlede, başlangıçta beyaz renge boyalı 10×10 satranç tahtasının bir beyaz birim karesini seçip kırmızıya boyuyor ve bu kareye bu kareyle ortak kenar paylaşan beyaz birim kare sayısını yazıyor. 100 işlem sonucunda tahtadaki sayıların toplamı en az kaç olabilir?

Cevap: 180. Ortak kenar paylaşan iki birim kare alalım. Bu kenarın tahtadaki sayıların toplamına katkısı 1 olacaktır. Demek ki tahtaya yazılacak sayıların toplamı boyama sırasına bağlı olmayıp birim kare ikililerinin ortak kenar sayısına eşittir.

25. Bir ABC üçgeninde $|AC| = |AB| = 25$ ve $|BC| = 40$ tır. $[BC]$ nin orta noktası D, B den AC ye çizilen dikmenin ayağı ise E dir. Buna göre, D den geçen ve AC doğrusuna E de teğet olan çemberin çapı kaçtır?

Cevap: $\frac{100}{3}$. Öncelikle $2 \cdot 25^2 < 40^2$ olduğundan $s(\widehat{BAC}) > 90°$ dir. ABC ikizkenar üçgen olduğundan $AD \perp BC$ dir. O halde E, A, D, B noktaları çemberseldir. Ayrıca ABD dik üçgeninde uygulanan Pisagor teoreminden $|AD| = 15$ bulunur. D den geçen ve AC ye E de teğet olan çemberin merkezi O olsun. $BE \perp EC$ olduğundan O noktası $[EB$ ışını üzerindedir. $[ED]$ nin orta noktası K olsun. BEC dik üçgen olduğundan $|ED| = 20$ ve $|EK| = 10$ dur. OED ikizkenar olduğundan $OK \perp ED$ dir. $s(\widehat{OEK}) = s(\widehat{BED}) = s(\widehat{BAD})$ olduğundan $OEK \sim BAD$ benzerliği elde edilir. Benzerlik oranından $|OE| = |EK| \cdot |BA|/|AD| = 10 \cdot 25/15 = 50/3$ bulunur. O halde cevap $2 \cdot 50/3 = 100/3$ tür.

26. a, b, c tam sayılar olmak üzere, $3a^3 + 5b^3 - 7c^3$ ifadesi 8, 14, 27, 30 değerlerinden kaçına eşit olabilir?

Cevap: 3. $a = b = c = 2$ için 8; $a = b = c = 3$ için 27; $a = 3, b = 1, c = 2$ için de 30 elde edilir. 14 ün bu şekilde yazılamayacağını gösterelim. Farzedelim ki yazılabilsin. (mod 7) de bir tam küp $-1, 0, 1$ den birine denktir. $3a^3 + 5b^3 \equiv 0 \pmod 7$ olur ve denkliğin sağlanması için $a \equiv b \equiv 0 \pmod 7$ olmalı. $a = 7m, b = 7n$ alırsak, $7^3(3m^3 + 5n^3) + 7c^3 = 14$, yani $7^2(3m^3 + 5n^3) + c^3 = 2$ elde edilir. O halde $c^3 \equiv 2 \pmod 7$ dir ancak bu mümkün değil, çalişki. O zaman cevap 3 tür.

27. a ve b gerçel sayılar olmak üzere, $5(a^2 + b^2) - 8ab - 6a$ ifadesinin alabileceği en küçük değer nedir?

Cevap: -5. $5(a^2 + b^2) - 8ab - 6a = (2a - b - 2)^2 + (a - 2b + 1)^2 - 5 \geq -5$ olur. Eşitlik $(a, b) = \left(\frac{5}{3}, \frac{4}{3}\right)$ iken sağlanır.

28. $1, 2, \ldots, 20$ sayılarının her biri kırmızı ve mavi renklerden birine, her $k = 1, 2, \ldots, a$ için farkları k olan iki kırmızı ve iki mavi sayı bulunacak biçimde boyanabiliyorsa, a nın alabileceği en büyük değer nedir?

Cevap: 17. $a = 18$ ise genelligi bozmadan 1 ile 19 sayılarının kırmızı ve 2 ve 20 sayılarının ise mavi renkte olduğunu varsayabiliriz. Bu durumda $k = 17$ alırsak 3 sayısı mavi, 18 sayısı kırmızı renkte oluyor. Benzer şekilde $4, 5, \ldots, 10$ sayıları mavi ve $11, 12, \ldots, 17$ sayıları da kırmızı renkte oluyor ve farkı 9 olan aynı renge boyalı iki sayı bulunamıyor. $a = 17$ için örnek: bulunuyor: 1,2,4,6,8,10,12,14,16,18 sayıları kırmızılar ve 3,5,7,9,11,13,15,17,19,20 sayıları mavi renkte olursa koşullar sağlanıyor.

29. Bir ω çemberine bu çemberin dış bölgesinde yer alan bir A noktasından çizilen bir teğetin değme noktası B dir. A noktasından geçen bir doğru ω çemberini sırasıyla C ve D noktalarında kesiyor. D den geçen ve AB doğrusuna paralel olan doğru ω yı ikinci kez AD doğrusuna göre B ile farklı tarafta kalan bir E noktasında kesiyor. BC ile AE doğruları F noktasında kesişiyor. Buna göre $\dfrac{|AC|}{|BC|} = 2$ ise $\dfrac{|AF|}{|FE|}$ kaçtır?

Cevap: 4. $s(\widehat{ABC}) = s(\widehat{BEC}) = s(\widehat{BDC})$ ve $s(\widehat{BAC}) = s(\widehat{CDE}) = s(\widehat{CBE})$ olduğundan $s(\widehat{ACF}) = s(\widehat{ECF})$ olur. Buradan da $\dfrac{|AF|}{|FE|} = \dfrac{|AC|}{|CE|}$ olur. ABC ile BEC üçgenleri benzer olduğundan $\dfrac{|AC|}{|BC|} = \dfrac{|BC|}{|CE|}$ olur. Buradan da $\dfrac{|AC|}{|CE|} = \left(\dfrac{|AC|}{|BC|}\right)^2 = 4$ bulunur.

30. k bir pozitif tam sayı olmak üzere, her a tam sayısı için $2^{n_1} + 2^{n_2} + \ldots + 2^{n_k} \equiv a \pmod{20}$ olacak biçimde $n_1, n_2, \ldots, n_k$ negatif olmayan tam sayıları bulunabiliyorsa, k nin alabileceği en küçük değer nedir?

Cevap: 3. 2 nin kuvvetleri 20 modunda $1, 2, 4, 8, 16, 12$ değerlerini alabilir. Buradan $k = 1$ olamaz. $k = 2$ için 7 sayısı 20 modunda iki tane 2 nin kuvvetinin toplamı olarak yazılamaz. Yani $k > 2$ olur. $k = 3$ için her sayı aşağıdaki gibi yazılabilir:

$0 \equiv 2+2+16$	$10 \equiv 2+4+4$
$1 \equiv 1+8+12$	$11 \equiv 1+2+8$
$2 \equiv 2+8+12$	$12 \equiv 4+4+4$
$3 \equiv 1+1+1$	$13 \equiv 1+4+8$
$4 \equiv 4+8+12$	$14 \equiv 1+1+12$
$5 \equiv 1+2+2$	$15 \equiv 1+2+12$
$6 \equiv 2+2+2$	$16 \equiv 4+4+8$
$7 \equiv 1+2+4$	$17 \equiv 1+8+8$
$8 \equiv 2+2+4$	$18 \equiv 1+1+16$
$9 \equiv 1+4+4$	$19 \equiv 1+2+16$

31. x, y, z gerçel sayıları, $x + y + z = 1$ ve $xyz = xy + yz + zx$ koşullarını sağlıyorsa, $(x + yz)(y + zx)(z + xy)$ ifadesi $0, 1, 2, 5$ sayılarından kaçına eşit olabilir?

Cevap: 1. $(x-1)(y-1)(z-1) = xyz - xy - yz - zx + x + y + z - 1 = 0$ olduğundan x, y, z sayılarından en az biri 1 olmalıdır. Genelliği bozmadan $x = 1$ dersek $y = -z$ olur. Bu durumda $y + zx = 0$ olacağından soruda verilen ifade sadece 0 olabilir.

32. Başlangıçta, tahtaya 1 ve 2 sayıları yazılmıştır. Aslı ve Burak sırayla hamle yaparak bir oyun oynuyorlar ve sırası gelen oyuncu tahtadaki sayılardan istediği birinin rakamları toplamını tahtadaki sayılardan istediği birine ekliyor. Tahtaya N den büyük olan bir sayıyı ilk defa yazan oyuncu oyunu kazanıyor. Oyuna Aslı başlamak üzere bu oyun, $N = 2013, 2014, 2015, 2016$ ve 2017 değerleri için birer kez oynanırsa, Aslı kaç kez oyunu kazanmayı garantileyebilir?

Cevap: 5. Aslı tüm oyunları kazanmayı garantileyebilir. Bunun için Aslı ilk hamlesinde sayıları 2,2 yapıyor ve bundan sonraki her hamlesinde tahtaya N'den büyük sayı yazamıyorsa, Burakın hamlesini tekrarlayarak durumu yine k, k yapıyor.