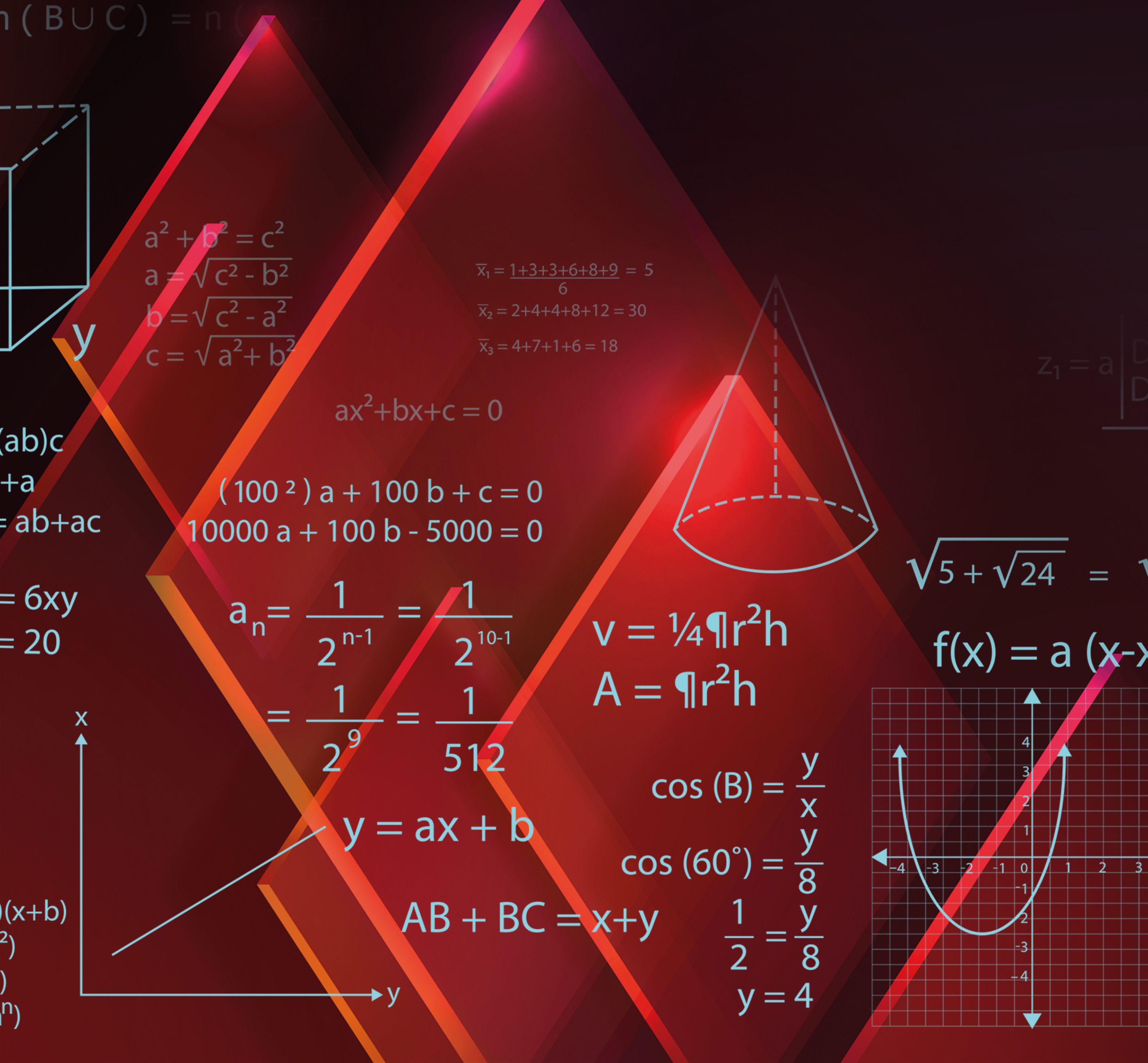
TÜBİTAK

Türkiye Cumhuriyeti
SANAYİ VE TEKNOLOJİ BAKANLIĞI

MATEMATİK

19. ULUSAL ORTAOKUL
MATEMATİK OLİMPİYATI
BİRİNCİ AŞAMA SINAV
SORU VE ÇÖZÜMLERİ

2014



TÜRKİYE BİLİMSEL VE TEKNOLOJİK ARAŞTIRMA KURUMU
BİLİM İNSANI DESTEK PROGRAMLARI BAŞKANLIĞI

ULUSAL MATEMATİK OLİMPİYATLARI SORU ve ÇÖZÜMLERİ

Ankara

Nisan 2019

1. $|AB| = |AC| = 12$ ve $|BC| = 4$ olan bir ABC üçgeninde C köşesine ait içaçıortayın $[AB]$ kenarını kestiği nokta D ve $[AC]$ kenarının orta noktası E ise, $|DE|$ nedir?

Cevap: $\sqrt{15}$. ABC üçgeninde $[CD]$ açıortayına göre uygulanan açıortay teoremlerinden $|DB| = 3, |DA| = 9$ ve $|DC| = \sqrt{21}$ olduğu görülür. ADC üçgeninde $|DE|$ için kenarortay teoremi uygularsak $|DE| = \sqrt{15}$ elde edilir.

2. $3x^2y^3 + y^3 - 21x^2 = 35$ eşitliğini sağlayan kaç (x, y) tam sayı ikilisi vardır?

Cevap: 2. Verilen eşitlikten $y^3 = \frac{21x^2+35}{3x^2+1} = 7 + \frac{28}{3x^2+1}$ elde edilir. Eşitliğin sağ tarafının tam sayı olması için $x \in \{-3, -1, 0, 1, 3\}$ olmalı. Bu beş sayıdan sadece $x = \pm 3$ için gelen tam sayı ifade aynı zamanda bir tam küptür.

3. En az birer beyaz top içeren iki kutudan birincisindeki beyaz topların sayısı kırmızı topların sayısından %25 daha az, ikinci kutudaki beyaz topların sayısı da kırmızı topların sayısından %20 daha fazladır. İki kutudaki toplam beyaz top sayısı toplam kırmızı top sayısından %5 daha fazla ise, toplam beyaz top sayısı toplam kırmızı top sayısından en az kaç tane fazla olabilir?

Cevap: 3. Birinci kutuda $4x$, ikinci kutuda ise $5y$ tane kırmızı top olsun. O zaman birinci kutuda $3x$, ikinci kutuda $6y$ tane beyaz top olacaktır. Koşullara göre $(3x+6y) = 1.05(4x+5y)$ ve buradan $5y = 8x$ olur. Toplam beyaz top sayısıyla toplam kırmızı top sayısının farkı $y - x = \dfrac{3x}{5}$ olduğundan x'ın alabileceği en küçük değer 5 olur ve buradan $y - x = 3$ elde edilir.

4. 2014 negatif olmayan gerçel sayı bir çemberin etrafına herhangi ardışık dördünün toplamı 19 olacak biçimde yazılmışsa, bu sayılardan en büyüğü en fazla kaç olabilir?

Cevap: 19/2. Tüm sayıların toplamı S olsun. $2014 = 2 + 4 \cdot 503$ olduğundan herhangi ardışık iki sayının toplamı $S - 19 \cdot 503$ olur. Tüm ardışık ikililerin toplamları eşit olduğundan her ikilinin toplamı 19/2 olur. Demek ki en büyük sayı en fazla 19/2'ye eşit olabilir. 19/2 için örnek verelim: $19/2, 0, 19/2, 0, \ldots, 19/2, 0$.

5. $|AB| = 9$ ve $|BC| = 8$ olan bir $ABCD$ dikdörtgeninin $[AB]$ ve $[AD]$ kenarlarına teğet olup C köşesinden geçen çemberin yarıçapı kaçtır?

Cevap: 5. Çemberin merkezi O, $[AB]$ ve $[AD]$ kenarlarına değme noktaları sırasıyla E ve F olsun. Bu durumda $AEOF$ nin bir kare olduğu görülür. O dan $[DC]$ kenarına inen dikme ayağı K ve çemberin yarıçapı R olmak üzere, $|OK| = 8 - R, |KC| = 9 - R$ ve $|OC| = R$ elde edilir. OKC üçgeninde Pisagor teoremi uygulanmasından $(8-R)^2 + (9-R)^2 = R^2$ elde edilir. Bu denklem $R^2 - 34R + 145 = 0$ denklemine denktir. Bu denklemin kökleri 5 ve 29 dur, ancak $R < 8$ olduğundan $R = 5$ olduğu görülür.

6. n pozitif bir tam sayı olmak üzere, $6n + 15$ ve $10n + 21$ sayılarının en büyük ortak böleni kaç farklı değer alabilir?

Cevap: 2. $ebob(6n+15, 10n+21) = ebob(6n+15, 4n+6) = ebob(2n+9, 4n+6) = ebob(2n+9, 2n-3) = ebob(12, 2n-3)$. $2n-3$ tek sayı olduğundan 12'nin bölenlerinden 2,4,6,12 sayıları $2n-3$ sayısı nı bölmez. $n = 3l$ durumunda 1 ve 3 en büyük ortak bölen oluyor.

7. $5^x x^2 + 125 = 5^{x+2} + 5x^2$ denklemini sağlayan kaç x gerçel sayısı vardır?

Cevap: 3. Verilen denklem toparlanıp çarpanlarına ayrıldığında $(5^x - 5)(x^2 - 25) = 0$ elde edilir. Çarpanlardan en az birinin 0 olmasını sağlayan x değerleri $1, -5$ ve 5 tir.

8. Dört basamaklı pozitif tam sayılardan kaç tanesinin her bir basamağı asal sayı ve basamakları toplamı çifttir?

Cevap: 136. Asal sayı olan rakamlar 2,3,5 ve 7 dir. Rakamları toplamının çift olması için ya hiç 2 içermez, ya tam olarak iki tane 2 içerir ya da dört rakamı da 2 dir. O halde cevap $3^4 + \binom{4}{2}3^2 + 1 = 81 + 54 + 1 = 136$.

9. $|AB| = 32$ olmak üzere, $[AB]$ ye ve $[AB]$ çaplı C_1 çemberine içten teğet olan C_2 çemberinin yarıçapı 8 birimdir. $[AB]$ ye, C_2 ye dıştan ve C_1 e içten teğet olan ve AB doğrusuna göre C_2 ile aynı tarafta yer alan çemberin yarıçapı kaçtır?

Cevap: 4. Yarıçapı sorulan çember C_3 olsun. C_1, C_2, C_3 ün merkezleri sırasıyla O_1, O_2, O_3 olsun. C_1 in yarıçapı 16 ve C_2 nin çapı 16 olduğundan dolayı C_2 nin $[AB]$ ye değme noktası O_1 dir. O_3 ten AB ve O_1O_2 ye inen dikme ayakları sırasıyla C ve D olsun. C_3 ün yarıçapı x olmak üzere, $|O_1O_3| = 16 - x$ ve $|O_3C| = x$ olduğu görülür. O_1CO_3 dik üçgeninde Pisagor teoreminden $|O_1C| = \sqrt{256 - 32x}$ elde edilir. O_1CO_3D bir dikdörtgendir. O_2DO_3 dik üçgeninde $|O_2O_3| = 8 + x, |O_2D| = 8 - x$ ve $|DO_3| = |O_1C| = \sqrt{256 - 32x}$ olduğundan dolayı Pisagor teorimi bize $(8 - x)^2 + (256 - 32x) = (8 + x)^2$ eşitliğini verir. Buradan da $256 = 64x$, yani $x = 4$ elde edilir.

10. 8^{49} sayısının 343 ile bölümünden kalan kaçtır?

Cevap: 1. $8^{49} = (7 + 1)^{49} = \sum_{i=0}^{49} \binom{49}{i} 7^i \equiv \binom{49}{2} \cdot 7^2 + \binom{49}{1} \cdot 7 + 1 \equiv 1 \pmod{343}$ olur.

11. Bir matematik testindeki sorulardan Aslı'nın doğru yanıtladıklarının sayısı Banu'nun doğru yanıtladıklarının sayısının 7 katı, Banu'nun yanlış yanıtladıklarının sayısı da Aslı'nın yanlış yanıtladıklarının sayısının 5 katıdır. Her iki öğrenci de testteki tüm soruları yanıtladıklarına göre, ikisinin de yanlış yanıtladığı soruların sayısı en az kaç olabilir?

Cevap: 1. Banu sınavdaki x sorudan y soruyu doğru yanıtlamış olsun. $x - y = 5(x - 7y)$. Buradan $17y = 2x$ ve $x = 17k, y = 2k$. Her iki öğrencinin de yanlış yanıtladığı soruların sayısı $17k - 2k - 14k = k$ olduğu için cevap $k = 1$ durumunda gelir.

12. Altı tane 1 ve beş tane 2 rakamı kullanılarak yazılan 11 basamaklı pozitif tam sayılardan kaç tanesinin herhangi ardışık beş basamağında en az üç tane 1 vardır?

Cevap: 10. Ardışık beş basamakta en fazla iki tane 2 bulunmalı. Sayımız $x_1x_2 \cdots x_{11}$ olsun. $x_1, x_2, \ldots, x_5$ ve $x_7, x_8, \ldots, x_{11}$ beşlilerinde en fazla ikişer tane 2 bulunacağından $x_6 = 1$ olmalı. O halde bu iki beşlide de tam olarak ikişer 2 vardır. $x_2, x_3, \ldots, x_6$ da en fazla iki tane 2 bulunduğundan $x_1 = 2$ dir. Benzer biçimde $x_{11} = 2$ olmalıdır. $x_2 = 2$ ise x_7, x_8, x_9, x_{10} dan biri 2 olabilir; $x_3 = 2$ ise x_8, x_9, x_{10} dan biri 2 olabilir; $x_4 = 2$ ise x_9 ve x_{10} dan biri 2 olabilir; $x_5 = 2$ ise de $x_{10} = 2$ olmalı. Toplamda $4 + 3 + 2 + 1 = 10$ sayı mevcuttur.

13. Aşağıdakilerden hangisi düzlemdeki beş doğrunun kesişim noktalarının kümesinin eleman sayısı olamaz?

Cevap: 2. Beş paralel doğru için kesişim sayısı 0 olur. Dört paralel doğru ve bir tane bunlara paralel olmayan doğru için kesişim sayısı 4 olur. İki tane x eksenine paralel doğru ve üç tane y eksenine paralel doğru için kesişim sayısı 6 olur. Beş doğrudan herhangi ikisi paralel değilse ve noktadaş olan yalnızca bir üçlü varsa kesişim sayısı 8 olur. Kesişim sayısının 2 olabileceğini varsayalım. Bu kesişim noktaları A ve B olsun. Bu beş doğrudan her biri A ve B den en az birini içermek zorundadır. Her ikisini içeren en fazla bir doğru olabilir. O halde sadece A dan geçen ve sadece B den geçen en az 4 doğru vardır. Ancak sadece A dan geçen bir doğru ile sadece B den geçen bir doğru paralel olmak zorunda (aksi takdirde başka bir kesişim noktası olurdu). Bu durumda da çelişki elde edilir.

14. $2^{2014} + 3^{2014} + 4^{2014} + 5^{2014} + 6^{2014}$ toplamının 13 ile bölümünden kalan nedir?

Cevap: 12. $n|a+b$ ve t tek pozitif tam sayı ise $n|a^t+b^t$ olduğundan $2^{2014}+3^{2014} = 4^{1007}+9^{1007} \equiv 0 \pmod{13}$ ve $4^{2014} + 6^{2014} = 16^{1007} + 36^{1007} \equiv 0 \pmod{13}$ olduğu görülür. $5^{2014} = 25^{1007} \equiv (-1)^{1007} \equiv -1 \pmod{13}$ ve dolayısıyla toplam $\pmod{13}$ te -1 e denktir.

15. Toplamları n ve kareleri toplamı $n + 19$ olan iki gerçel sayı bulunmasını sağlayan en büyük n pozitif tam sayısı kaçtır?

Cevap: 7. $a+b=n$ ve $a^2+b^2=n+19$ ise, $(a-b)^2 = 2(a^2+b^2)-(a+b)^2 = 2n+38-n^2 > 0$ olmalı. O halde $(n-1)^2 < 39$ olur. O zaman n nin alabileceği en büyük tam sayı değer 7 dir.

16. $\{1, 2, \ldots, 33\}$ kümesinin k elemanlı her altkümesinde biri diğerinin iki katı olan iki eleman bulunuyorsa, k en az kaç olabilir?

Cevap: 23. Bir altkümede biri diğerinin iki katı olan iki eleman bulunmuyorsa bu altküme $\{1, 2, 4, 8, 16, 32\}$ kümesinden en fazla 3; $\{3, 6, 12, 24\}$, $\{5, 10, 20\}$, $\{7, 14, 28\}$ kümelerinden en fazla ikişer; $\{9, 18\}, \{11, 22\}, \{13, 26\}, \{15, 30\}$ kümelerinden en fazla birer; $\{17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33\}$ kümesinden ise en fazla 9 eleman içerebilir. O halde eleman sayısı en fazla $3+6+4+9 = 22$ dir ev 22 elemanlı böyle bir altküme de mevcuttur. Dolayısıyla cevap 23.

17. $AB//CD$ olmak üzere, bir $ABCD$ yamuğunun sırası ile $[AD]$ ve $[BC]$ kenarları üzerinde alınan E ve F noktaları için $EF//AB$ dir. $|AB| = 33$, $|CD| = 9$ ve $ABFE$ yamuğunun alanı $CDEF$ yamuğunun alanının altı katı ise, $|EF|$ nedir?

Cevap: 15. C den AD ye paralel çizilen doğru EF ve AB yi sırasıyla K ve L de kessin. O zaman $|EK| = |AL| = 9$ ve $|LB| = 24$ olduğu görülür. C den EF ve AB ye inen yükseklik uzınlukları sırasıyla h_1 ve h_2 olsun. $|KF| = 2x$ olmak üzere, $CKF \sim CLB$ olduğundan $\frac{h_1}{h_2} = \frac{2x}{24} = \frac{x}{12}$ elde edilir. Soruda verilen alan bilgisinden $7 = \frac{Alan(ABCD)}{Alan(EFCD)} = \frac{21h_2}{(x+9)h_1} = \frac{252}{x(x+9)}$ olduğu görülür ve $x(x+9) = 36$ elde edilir. Dolayısıyla $x = 3$ tür ve $|EF| = 9+2\cdot 3 = 15$ tir.

18. $(n-1)^3(n+1)^4$ ifadesinin 2^{19} ile tam bölünmesini sağlayan 2014 ten küçük kaç n pozitif tam sayısı vardır?

Cevap: 188. Öncelikle, n çift sayı olamaz. t_1 ve t_2 tek sayılar olmak üzere $n-1 = 2^a t_1$ ve $n+1 = 2^b t_2$ olsun. O zaman $3a+4b \geq 19$ olmalı. $n-1$ ve $n+1$ sayılarının farkı 2 olduğundan a ve b den biri 1 dir. $a = 1$ ise $b \geq 4$, $b = 1$ ise $a \geq 5$ olmalı. O halde $n \equiv -1 \pmod{16}$ veya $n \equiv 1 \pmod{32}$ olmalı. Bu formlarda 2014 ten küçük toplam $125 + 63 = 188$ sayı vardır.

19. $a+b+c+d+e+f = 9$ koşulunu sağlayan a, b, c, d, e, f tam sayıları için, $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2$ ifadesinin alabileceği en küçük değer nedir?

Cevap: 15. Her n tam sayısı için $(n-1)(n-2) \geq 0$ olduğundan $n^2 \geq 3n-2$ ve buradan da $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2 \geq 3(a+b+c+d+e+f) - 12 = 15$ olur. Eşitlik $(a,b,c,d,e,f) = (1,1,1,2,2,2)$ iken sağlanır.

20. $1, 2, \ldots, 9$ sayıları, 3×3 bir tahtanın birim karelerine, her bir birim karede bir sayı bulunacak ve her satır ve her sütundaki sayıların toplamı tek sayı olacak şekilde kaç farklı biçimde yerleştirilebilir?

Cevap: 25920. Her satır ve her sütunda 0 veya 2 tane çift sayı bulunmalı. 0 tane çift sayı içeren satır ve sütun belirlendiğinde bu satır ve sütunda bulunmayan 4 birim karede çift sayılar yer alamlı. Bu satır ve sütundaki toplam 5 birim karede de tek sayılar bulunmalı. Dolayısıyla cevap $\binom{3}{1}\binom{3}{1}4!5! = 3\cdot 3\cdot 24\cdot 120 = 25920$.

21. $|AC| = 30$ ve $s(\widehat{ABC}) = 90^\circ$ olan bir ABC üçgeninde C köşesine ait içaçıortayın $[AB]$ kenarı ile kesişimi D noktası ve $|CD| = 5\sqrt{6}$ ise, $|BC|$ kaçtır?

Cevap: 10. A dan CB ye paralel çizilen doğru ile CD nin kesişimi E, A dan EC ye inen dikme ayağı F olsun. CD açıortay olduğundan $s(\widehat{EAC}) = s(\widehat{ACE})$ dir ve dolayısıyla EAC bir ikizkenar üçgendir. O halde $[EC]$ nin orta noktası F dir. $|BC| = x$ olsun. $CAF \sim CDB$ benzerliğinden $|CF| = x\sqrt{6}$ bulunur. O zaman $|FD| = (x-5)\sqrt{6}$ ve $|ED| = (2x-5)\sqrt{6}$ elde edilir. $EAD \sim CBD$ benzerliğinden $\frac{30}{x} = \frac{(2x-5)\sqrt{6}}{5\sqrt{6}}$ elde edilir. Buradan da $2x^2 - 5x - 150 = 0$ bulunur. Bu denklemin kökleri 10 ve $-\frac{15}{2}$ dir ve dolayısıyla $x = 10$ dur.

22. $2^{23} + 14!$ sayısının ondalık yazılımı $87A86B79808$ ise, $A \cdot B$ çarpımı kaçtır?

Cevap: 6. Bu sayının 9 ve 11 ile bölümünden kalanları bulalım. $2^{23} = (2^6)^3 2^5 = 64^3 \cdot 32 \equiv 1 \cdot 5 = 5 \pmod 9$, $2^{23} = (2^5)^4 2^3 = 32^5 \cdot 8 \equiv (-1)^4 \cdot 8 = 8 \pmod{11}$ ve $14!$ sayısı hem 9 hem de 11 ile tam bölündüğünden bu sayı (mod 9) da 5 e (mod 11) de ise 8 e denktir. O halde $8+7+A+8+6+B+7+9+8+0+8 = A+B+61 \equiv 5 \pmod 9$, yani $A+B \equiv 7 \pmod 9$. Ayrıca $8-7+A-8+6-B+7-9+8-0+8 = A-B+13 \equiv 8 \pmod{11}$, yani $A-B \equiv 6 \pmod{11}$. O zaman, A ve B rakamlar olduğundan, $A+B \in \{7, 16\}$ ve $A-B \in \{-5, 6\}$. Bu iki sayının toplamı çift olduğundan $A+B = 7$ ve $A-B = -5$ ya da $A+B = 16$ ve $A-B = 6$. O halde $A = 1$ ve $B = 6$ ya da $A = 11$ ve $B = 5$. A ve B rakam olduğundan ikinci durum olamaz.

23. $x^2 + 2xy = 4x + 3y^2$ eşitliğini sağlayan kaç (x, y) tam sayı ikilisi vardır?

Cevap: 4. Verilen eşitlik $x^2 + 2x(y-2) = 3y^2$, yani $(x + (y-2))^2 = 3y^2 + (y-2)^2 = 4y^2 - 4y + 4 = (2y-1)^2 + 3$ olarak yazılabilir. Buradan $(x+3y-3)(x-y-1) = 3$ elde edilir. Çarpanların 1,3; 3,1; $-1,-3$; $-3,-1$ olmasına göre sırasıyla $(4,0), (3,1), (-1,1), (0,0)$ çözümleri gelir.

24. Bir masanın üstünde 300 tane fındıktan oluşan bir öbek vardır. Her adımda, Ali seçtiği bir öbekten bir tane fındık yiyip, sonra bu öbekte kalan fındıkları en az birer fındık içeren iki öbeğe ayırıyor. Bir kaç hamle sonucunda tüm öbeklerde k tane fındık varsa, k sayısı $3, 4, 5, 6, 7$ değerlerinden kaçını alabilir?

Cevap: 1. $n \geq 2$ bir tam sayı olmak üzere, $n-1$ adım yapıldıktan sonra masa üstünde n öbek bulunacaktır. Dolayısıyla, masa üzerindeki toplam fındık sayısı ile toplam öbek sayısının toplamı her zaman 301 olacaktır. Buna göre, masa üstünde m tane üç elemanlı öbek kaldıysa

$3m + m = 4m = 301$, çelişki geliyor. Masa üstünde m tane dört elemanlı öbek kaldıysa $4m + m = 5m = 301$, çelişki geliyor. Masa üstünde m tane beş elemanlı öbek kaldıysa $5m + m = 6m = 301$, çelişki geliyor. Masa üstünde m tane yedi elemanlı öbek kaldıysa $7m + m = 8m = 301$, çelişki geliyor. Ali her adımda 6 fındık içeren yeni bir öbek oluşturarak 42 adım sonucunda masa üstünde 43 tane beş elemanlı öbek oluşturabilir.

25. Bir ABC üçgeninin A ve B köşelerinden geçen bir çember $[BC]$ ve $[AC]$ kenarlarını sırasıyla, D ve E noktalarında kesiyor. $[AB]$ ve $[AD]$ nin orta noktaları sırasıyla, P ve Q olsun. BC doğrusunun A ya göre farklı tarafında olan bir Z noktası için, ZD ve AD doğruları birbirine dik ve $|DZ| = |DP|$ dir. $|AE| = 1$, $|BD| = 4$ ve $|DC| = 2$ ise, $|ZQ|$ nedir?

Cevap: $\sqrt{10}$. C noktasının A, B, D, E noktalarından geçen çembere göre kuvveti ele alındığında $|CE| = 3$ bulunur. $|AB| = 2x, |PD| = y, |AD| = 2z$ olsun. ZDQ dik üçgen olduğundan $|ZQ|^2 = y^2 + z^2$ olduğu görülür. ABD üçgeninde $[PD]$ kenarortayına göre uygulanan kenarortay teoreminden $x^2 + y^2 = 2z^2 + 8$ elde edilir. ABC üçgeninde $[AD]$ ye göre uygulanan Stewart teoreminden ise $3z^2 = x^2 + 2$ elde edilir. Bu iki eşitliğin taraf tarafa toplanmasından $y^2 + z^2 = 10$, yani $|ZQ| = \sqrt{10}$ olduğu görülür.

26. Farklı üç pozitif tam sayı böleninin toplamı kendisine eşit olan 2014 ten küçük kaç pozitif tam sayı vardır?

Cevap: 335. A, B, C sayıları n nin farklı bölenleri olmak üzere $n = A + B + C$ olsun. O halde $n = Aa = Bb = Cc$ olacak şekilde farklı a, b, c pozitif tam sayıları vardır Bu durmda $1 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ elde edilir. Kolayca görüleceği üzere bu eşitliği sağlayan farklı pozitif tam sayı üçlüsü sadece $2, 3, 6$ dır. O halde şartın sağlanması için gerek ve yeter şart n sayısının 6 ile tam bölünmesidir. 2014 ten küçük 6 ile tam bölünen 335 pozitif tam sayı vardır.

27. $x^3 + 2y^3 = 3$ ve $xy^2 = 1$ koşullarını sağlayan (x, y) gerçel sayı ikilileri için, $x^3 + y^3$ ifadesinin alabileceği değerlerin çarpımı nedir?

Cevap: 7. $a = x^3$ ve $b = y^3$olsun. O halde verilen eşitlikler $a + 2b = 3$ ve $ab^2 = 1$ eşitliklerine denktir. $a + b = c$ olsun. Soruda c nin alabileceği değerlerin çarpımı soruluyor. $a = 2c - 3$ ve $b = 3 - c$ olduğundan $(2c - 3)(3 - c)^2 = 1$ olduğu görülür. Buradan $2c^3 - 15c^2 + 36c - 28 = 0$ denklemi elde edilir. $(2c-3)(3-c)^2 = 1$ eşitliğinde $c = 2$ bir çözüm olduğundan bulduğumuz denklemde $(c - 2)$ çarpanı olmalıdır. Sonuç olarak $(c-2)^2(2c-7) = 0$ elde edilir. Dolayısıyla c nin alabileceği değerler 2 ve $\frac{7}{2}$ dir.

28. 101 madeni paranın tam olarak 3 tanesi sahtedir. Gerçek paraların ve sahte paraların ağırlıkları kendi aralarında eşit olup, sahte paralar gerçek paralardan daha hafiftir. İki kefeli bir tartı en az kaç kez kullanılarak gerçek paralardan 25 tanesini belirlemek garantilenebilir?

Cevap: 2. Bir tartmayla 25 gerçek madeni para belirlenemez. Şimdi iki tartmayla 25 gerçek paranın belirlenebileceğini gösterelim. Birinci tartmada her iki kefeye 50 şer madeni para koyalım. Hafif olmayan kefede en fazla 1 sahte madeni para olacak. İkinci tartmada hafif olmayan kefedeki 50 madeni parayı iki kefeye 25 şer olarak koyalım. Hafif olmayan kefedeki tüm madeni paralar gerçek para olacaktır.

29. $|AB| = 1$, $|BC| = \sqrt{3}$ ve $|CA| = \sqrt{2}$ olan bir ABC üçgeninin $[BC]$ kenarına ait bir D noktası için, AD doğrusu B köşesine ait kenarortayı P noktasında kesiyor ve $|PD|/|PA| = \sqrt{2} - 1$ ise, $s(\widehat{DAC})$ nedir?

Cevap: $45°$. Öncelikle, $|BC|^2 = |AC|^2 + |AB|^2$ olduğundan $s(\widehat{BAC}) = 90°$ dir. $[AC]$ nin orta noktası K olmak üzere, ADC üçgeninde B, P, K kesenine göre uygulanan Menelaus teoreminden $\frac{|BD|}{|BC|}\frac{|CK|}{|KA|}\frac{|AP|}{|DP|} = 1$ elde edilir. Buradan $\frac{|BD|}{|BC|} = \sqrt{2} - 1$ olduğu görülür. O halde $\frac{|CD|}{|DB|} = \sqrt{2} = \frac{|CA|}{|AB|}$ dir. O zaman $[AD]$ doğru parçası ABC üçgeninde A nın içaçıortayıdır. Dolayısıyla $s(\widehat{DAC}) = 45°$ dir.

30. Tam olarak 19 tane pozitif tam sayı böleni olan bir tam sayının 11 ile bölümünden kalan aşağıdakilerden hangisi olamaz?

Cevap: 7. Tam olarak 19 pozitif böleni olan bir sayı p asal sayı olmak üzere p^{18} formundadır. Bu sayı p^9 un karesidir ve bir tam sayının karesi $\pmod{11}$ de sadece $0, 1, 3, 4, 5, 9$ değerlerini alabilir. Dolayısıyla bu formdaki bir sayının 11 ile bölümünden kalan 7 olamaz. $p = 23, 2, 3, 37$ için p^{18} in 11 ile bölümünden kalan sırasıyla $1, 3, 5, 9$ dur.

31. $a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca = b - c - 1$ eşitliğini sağlayan kaç (a, b, c) gerçel sayı üçlüsü vardır?

Cevap: 1. Eşitliğin iki tarafı da 2 ile çarpılıp tüm terimler sol tarafta toplandığında $(a + b + c)^2 + a^2 + (b - 1)^2 + (c + 1)^2 = 0$ elde edilir. Sonuç olarak $a = 0, b = 1, c = -1$ olması gerektiği görülür.

32. Başlangıçta tahtada Aslı ve Berk'e ait olmak üzere beşer sayı bulunuyor. Oyunun her hamlesinde sayılarının toplamı daha büyük olan öğrenci kendi sayılarından birini siliyor. Toplamların eşit olması durumunda sayı silme sırası Berk'e veriliyor. Kendi sayılarının tümünü ilk silen öğrenci oyunu kazanıyor. Oyun, Aslı ve Berk'in sayıları sırasıyla (1,3,5,7,9) ve (2,4,6,8,10); (1,2,5,9,10) ve (1,3,4,8,9); (1,2,5,9,10) ve (1,4,5,7,9); (2,4,5,8,10) ve (1,4,5,7,9) olarak birer kez oynanırsa, Aslı bu oyunların kaçını kazanmayı garantileyebilir?

Cevap: 3. Başlangıçta en büyük sayıya sahip olan oyuncu bu sayıyı en son silerek en son hamlenin rakipde olamayacağı için oyunu kazanabilir. Buna göre Aslı oyunların üçünü kazanmayı garantileyebilir.