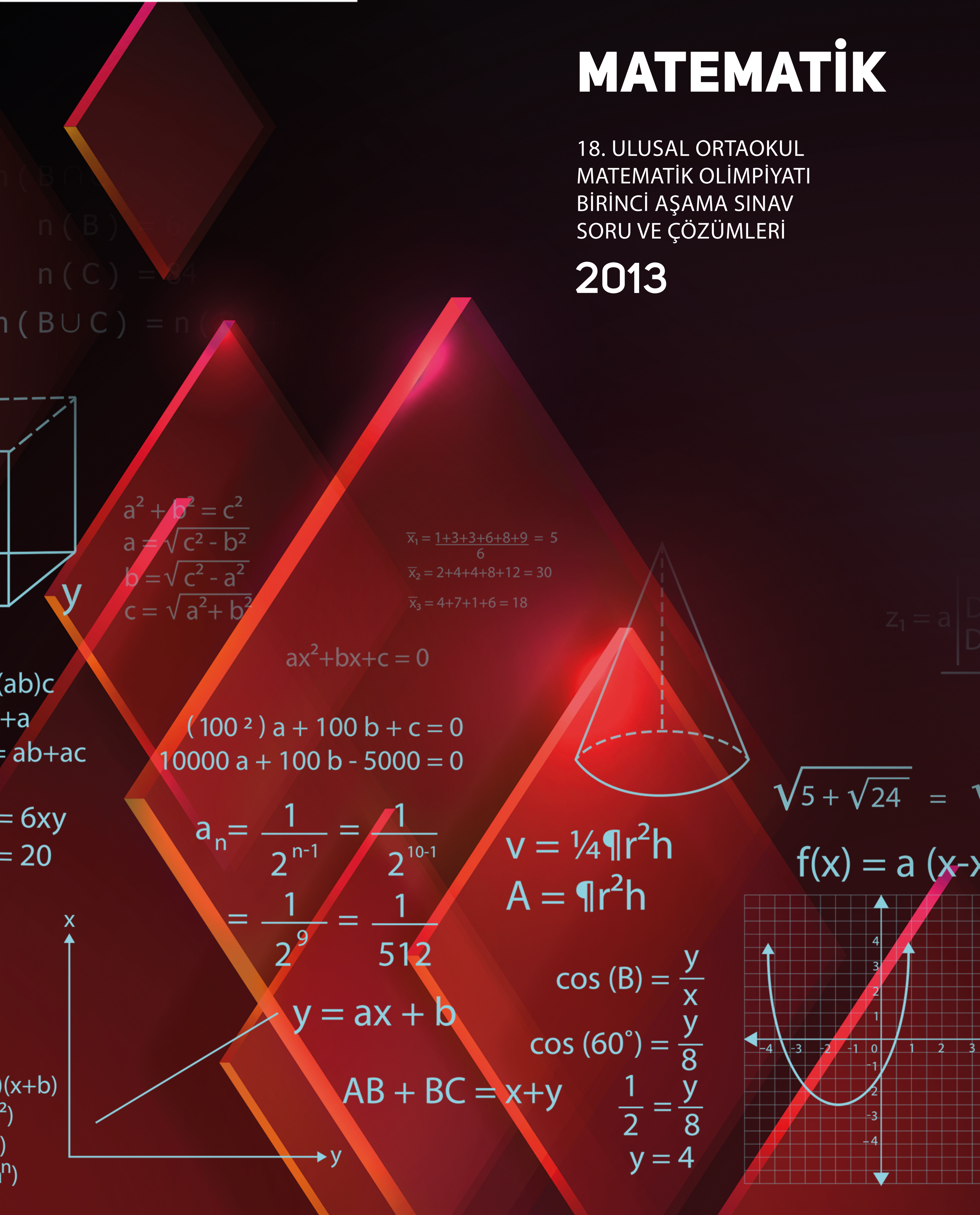
TÜBİTAK

Türkiye Cumhuriyeti
SANAYİ VE TEKNOLOJİ BAKANLIĞI

MATEMATİK

18. ULUSAL ORTAOKUL
MATEMATİK OLİMPİYATI
BİRİNCİ AŞAMA SINAV
SORU VE ÇÖZÜMLERİ

2013



TÜRKİYE BİLİMSEL VE TEKNOLOJİK ARAŞTIRMA KURUMU
BİLİM İNSANI DESTEK PROGRAMLARI BAŞKANLIĞI

ULUSAL MATEMATİK OLİMPİYATLARI SORU ve ÇÖZÜMLERİ

Ankara

Nisan 2019

1. Ali matematik ve fizik ödevlerinde aynı oranda soru çözüyor. Fizik ödevinde toplam 25 soru varsa ve Ali tam olarak 18 matematik sorusu çözdüyse, matematik ödevindeki toplam soru sayısının alabileceği kaç farklı değer vardır?

Cevap: 10. Matematik ödevindeki soru sayısı $k \geq 18$, fizik ödevindeki çözülen soru sayısı n olsun. O zaman $kn = 18 \cdot 25 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$ olur. Buradan k'nın alabileceği değerler 18, 30, 45, 90, 25, 50, 75, 150, 225 ve 450 olur.

2. $20x^3 - 13y^3 = 2013$ eşitliğini sağlayan kaç (x, y) pozitif tam sayı ikilisi vardır?

Cevap: 0. Eşitlik $\pmod 7$ de incelendiğinde $y^3 - x^3 \equiv 4 \pmod 7$ elde edilir. Ancak bir tam küp $\pmod 7$ de $-1, 0, 1$ değerlerini alabildiğinden denkliği sağlayan tam sayıların bulunmadığı görülür.

3. $\widehat{A}$ ve $\widehat{B}$ açıları dik olan $ABCD$ yamuğunda $[AB]$ çaplı çember $[CD]$ kenarına E noktasında teğettir. $[AB]$ nin orta noktası O ve AB ile CD doğrularının kesişim noktası F olmak üzere, $s(\widehat{CDO}) = 70°$ ise, $s(\widehat{DFO})$ nedir?

Cevap: $50°$. $[AB]$ nin orta noktası çemberin merkezi olduğundan $OE \perp CD$ olur. OD doğrusu AOE açısının iç açıortayı olacağından $\angle DOE = \angle DOA = 20°$ ve buradan da $\angle DFO = 50°$ bulunur.

4. 18, 2013 ve n sayılarının en büyük ortak böleninin 3, en küçük ortak katının 60390 olmasını sağlayan kaç pozitif n tam sayısı vardır?

Cevap: 16. $18 = 2 \cdot 3^2, 2013 = 3 \cdot 11 \cdot 61$ ve $60390 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 61$ olduğundan $n = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot 11^d \cdot 61^e$ formunda olmalı ve $a \in \{0, 1\}, b \in \{1, 2\}, c = 1, d \in \{0, 1\}, e \in \{0, 1\}$ koşulları sağlanmalı. Bu şartları sağlayan $2^4 = 16$ sayı vardır.

5. 18 özdeş top 4 farklı kutuya tam olarak 2 kutuda tek sayıda top bulunacak şekilde kaç farklı biçimde dağıtılabilir?

Cevap: 990. Tek sayıda top bulunan kutuları seçip bu kutulara birer top koyalım. Kalan 16 topu her biri iki toptan oluşan 8 gruba ayıralım ve bu 8 ikiliyi 4 kutuya dağıtalım:

$$\binom{4}{2}\binom{8+4-1}{4-1} = 990.$$

6. Bir $ABCD$ dışbükey dörtgeninde $s(\widehat{ABC}) = s(\widehat{ADC}) = 90°$, $s(\widehat{BAC}) = 40°$, $s(\widehat{CAD}) = 20°$ ve $|BD| = 6$ ise, $|AC|$ nedir?

Cevap: $4\sqrt{3}$. $[AC]$ nin orta noktası E olsun. $\angle ABC = \angle ADC = 90°$ olduğundan $|AE| = |EC| = |EB| = |ED|$ olur. $ABCD$ kirişler dörtgeni oluğundan $\angle DBC = \angle DAC = 20°$, $\angle CDB = \angle CAB = 40°$ olur. $\angle EBA = \angle EAB = 40°$ ve $\angle EDA = \angle EAD = 20°$ olduğundan $\angle EBD = \angle EDB = 30°$ elde ederiz. $30° - 30° - 120°$ üçgeninde kısa kenarlar uzun kenarın $1/\sqrt{3}$ katına eşittir. Buradan da $|AE| = |EC| = |EB| = |ED| = 2\sqrt{3}$ ve $|AC| = 4\sqrt{3}$ olur.

7. n nin aşağıdaki değerlerinden hangisi için, $x^2 + y^2 = n$ ve $1 \le x \le y$ koşullarını sağlayan tam olarak bir (x, y) tam sayı ikilisi vardır?

a) 259 b) 257 c) 221 d) 185 e) 165

Cevap: 257. $4k + 3$ formundaki bir p asal sayısı için $p|x^2 + y^2$ ise, $p|x$ ve $p|y$ dir ve dolayısıyla $p^2|x^2 + y^2$ dir. $259 = 7 \cdot 37$ ve $165 = 3 \cdot 5 \cdot 11$ olduğundan $x^2 + y^2 = 259$ veya 165 eşitliğini sağlayan tam sayılar yoktur. $221 = 5^2 + 14^2 = 10^2 + 11^2$ dir. $185 = 4^2 + 13^2 = 8^2 + 11^2$ dir. $257 = 1^2 + 16^2$ dir ve başka x, y tam sayılarının olmadığını görmek kolaydır.

8. 2 beyaz ve 4 kırmızı taş en çok 4 öbeğe kaç farklı biçimde ayrılabilir?

Cevap: 25. Beyaz toplar aynı kutuya giderse ve
kırmızılar 4 kutuya $4 + 0 + 0 + 0$ giderse 2 durum
kırmızılar 4 kutuya $3 + 1 + 0 + 0$ giderse 3 durum
kırmızılar 4 kutuya $2 + 2 + 0 + 0$ giderse 2 durum
kırmızılar 4 kutuya $2 + 1 + 1 + 0$ giderse 3 durum
kırmızılar 4 kutuya $1 + 1 + 1 + 1$ giderse 1 durum.

Beyaz toplar farklı kutulara giderse ve
kırmızılar 4 kutuya $4 + 0 + 0 + 0$ giderse 2 durum
kırmızılar 4 kutuya $3 + 1 + 0 + 0$ giderse 4 durum
kırmızılar 4 kutuya $2 + 2 + 0 + 0$ giderse 3 durum
kırmızılar 4 kutuya $2 + 1 + 1 + 0$ giderse 4 durum

kırmızılar 4 kutuya $1+1+1+1$ giderse 1 durum.

9. $\widehat{A}$ ve $\widehat{C}$ açıları dik olan bir $ABCD$ dışbükey dörtgeninde $[BD]$ ve $[AC]$ köşegenlerinin orta noktaları sırasıyla, E ve F dir. $|AC| = 2\sqrt{3}$ ve $|BD| = 4\sqrt{7}$ ise, $|EF|$ nedir?

Cevap: 5. $\angle BAD = \angle BCD = 90°$ olduğundan $[BD]$ nin orta noktası $ABCD$ kirişler dörtgeninin çevrel çember merkezi olur. Buradan da $|AE| = |EC| = |BE| = |DE| = 2\sqrt{7}$ olur. AEC üçgeni ikizkenar olduğundan $EF \perp AC$ ve buradan da Pisagor teoremini kullanarak $|EF| = \sqrt{|AE|^2 - |AF|^2} = 5$ elde ederiz.

10. Her sayının yazılı olduğu birim kareyle ortak bir kenar paylaşan en az iki birim kareye de aynı sayı yazılmak koşuluyla bazı birim karelerine birer sayı yazılan 18×18 bir satranç tahtasına en fazla kaç farklı sayı yazılabilir?

Cevap: 81. Tahtadaki her sayı en az 4 kez yazılmak zorundadır. Bu nedenle en fazla $\dfrac{18 \cdot 18}{4} = 81$ farklı sayı yazılabilir. 18×18 satranç tahtasını 81 tane 2×2 kareye bölüp bu karelere $1, 2, \ldots, 81$ sayılarını yazarsak 81 için bir örnek elde ederiz.

11. $\dfrac{1}{n+1}$ den büyük, $\dfrac{1}{n}$ den küçük ve paydası 2013 olacak biçimde yazılabilen tam olarak bir tane rasyonel sayı bulunmasını sağlayan en küçük n pozitif tam sayısının rakamlarının toplamı nedir?

Cevap: 5. $\dfrac{1}{n+1} < \dfrac{k}{2013} < \dfrac{1}{n}$ koşulunu sağlayan tam olarak bir k bulunması isteniyor. Bu da $\dfrac{2013}{n+1} < k < \dfrac{2013}{n}$ eşitsizliğini sağlayan sadece bir k bulunmasına denktir. O halde $\dfrac{2013}{n} - \dfrac{2013}{n+1} < 2$ olmalı. $\Rightarrow 1006,5 < n(n+1)$ şartı sağlanmalı. $31 \cdot 32 = 992$ ve $32 \cdot 33 = 1056$ olduğundan $n \geq 32$ elde edilir. $2013/33 = 61$ ve $2013/32 = 62,90625$ olduğundan $n = 32$ iken $k = 62$ tek çözümdür. O halde şartı sağlayan en küçük sayı 32 dir.

12. A merkezli ve B noktasından geçen bir Γ_1 çemberi, B merkezli bir Γ_2 çemberini C ve D noktalarında kesiyor. Γ_1 in CBD yayının ölçüsü $110°$ ise, Γ_2 nin büyük CD yayının ölçüsü nedir?

Cevap: 235°. Γ_1 çemberinin büyük CD yayının ölçüsü $360° - 110° = 250°$ olur. Buradan da $\angle CBD = 125°$ buluruz. Bu ise Γ_2 çemberinin küçük CD yayının ölçüsünün $125°$ olduğunu gösterir. Yani bu çemberde büyük CD yayının ölçüsü $360° - 125° = 235°$ olur.

13. Başlangıçta bir öbekte n taş bulunuyor. Ayşe ve Burak sırayla hamle yapıyorlar ve sırası gelen oyuncu seçtiği bir öbeği hiçbiri boş olmayan üç öbeğe ayırıyor. Hamle yapamayan oyunu kaybediyor. Oyuna her sefer Ayşe başlamak üzere, oyun $n = 2011, 2012, 2013, 2014, 2015$ değerleri için birer kez oynanırsa, Ayşe bunlardan kaçını kazanmayı garantileyebilir?

Cevap: 5. Ali, ilk hamlesinde $n = 2k + 1$ durumunda taşları $1, k, k$ ve $n = 2k + 2$ durumunda taşları $2, k, k$ olarak başlarsa, 1 veya 2 taştan oluşan öbekler oyun dışı kalır. Bundan sonra Ali, Burak'ın hamlelerinin simetriğini yaparak oyunu kaybetmemeyi garantiler.

14. $\sqrt{n}$ sayısının on tabanına göre yazılımında virgülden sonraki ilk iki basamağındaki rakamların 0 olmasını sağlayan ve tam kare olmayan en küçük n pozitif tam sayısı kaçtır?

Cevap: 2501. $\sqrt{n}$ nin tam değerine k dersek, verilen koşul $k < \sqrt{n} < k + 0,01$ eşitsizliğine denktir. $\Rightarrow k^2 < n < k^2 + 0,02 \cdot k + 0,0001$. $\Rightarrow 1 < 0,02 \cdot k + 0,0001$. $\Rightarrow k > \dfrac{0,999}{0,02} = 49,95$. $\Rightarrow k \geq 50$ ve $n \geq 50^2 + 1 = 2501$. Eşitsizliklerden dolayı $n = 2501$ in şartı sağladığı açıktır.

15. $|AB| = 3$ ve $|AC| = 4$ olan bir ABC üçgeninin $[BC]$ kenarı üstündeki bir D noktası için, ABD ve ACD üçgenlerinin ağırlık merkezleri sırasıyla, G_1 ve G_2 olmak üzere, $|G_1G_2| = 2$ ise, $|BC|$ nedir?

Cevap: 6. $[BD]$ ve $[CD]$ nin orta noktaları sırasıyla E ve F olsun. $|BE| = |ED|$ ve $|DF| = |FC|$ olduğundan $|BC| = 2|EF|$ olur. Ağırlık merkezi kenarortayları $2 : 1$ oranında böldüğünden $|AG_1|/|G_1E| = |AG_2|/|G_2F| = 2$ ve buradan da $G_1G_2 \parallel EF$ olur. Benzerlikten $|G_1G_2|/|EF| = 2/3$ ve buradan da $|EF| = 3$ ve son olarak $|BC| = 6$ olur.

16. Bir tahtaya yan yana n tane hepsi birbirinin aynı olmayan pozitif tam sayı yazılmıştır. Sonuncu dışında, her sayı ile sağındaki sayının 3 katının toplamı 1000 ediyorsa, n en çok kaç olabilir?

Cevap: 7. Sayılar $x_1, \dots, x_n$ olsun: $i = 1, \dots, n-1$ için $x_i + 3x_{i+1} = 1000$. $y_i = x_i - 250$ olsun. O zaman sorudaki koşul $i = 1, \dots, n-1$ için $y_i + 3y_{i+1} = 0$ olacaktır. $y_n = 0$ olursa $x_1 = \cdots = x_n$ çelişkisi elde edilir. O zaman $|y_n| \geq 1$ ve $|y_1| = 3^{n-1}|y_n| \geq 3^{n-1}$ olur. $1 \leq x_1 \leq 997$ olduğundan $-249 \leq y_1 \leq 747$ elde edilir. Buradan $3^{n-1} \leq 747$ ve $n \leq 7$ gelir. $n = 7$ için örnek: $y_1 = -729, y_2 = 243, y_3 = -81, y_4 = 27, y_5 = -9, y_6 = 3, y_7 = -1$.

17. Pozitif bir tam sayının 2013 katının rakamları toplamı 12 ise, bu sayının rakamlarının toplamı 8, 10, 12, 14, 16 değerlerinden kaçını alabilir?

Cevap: 2. Bir sayının rakamları toplamı sayının $\pmod 9$ daki değerine denktir. Sorudaki sayının rakamları toplamına n dersek, $n \cdot 6 \equiv 12 \pmod 9$ elde edilir. $\Rightarrow 9|6(n-2)$. $\Rightarrow 3|n-2$. O halde n sayısı 8, 10, 12, 14, 16 değerlerinden 8 ve 14 olabilir. 8 için örnek sayı kendisi, $8 \cdot 2013 = 16104$. 14 için örnek sayı 77, $77 \cdot 2013 = 155001$.

18. $|AB| = 6$, $|AC| = 8$, $|BC| = 10$ olan bir ABC üçgeninde A ya ait yüksekliğin ayağı H ve $[BC]$ nin orta noktası D dir. AHD üçgeninin çevrel çemberinin $[AB]$ ve $[AC]$ kenarlarını ikinci kez kestiği noktalar sırasıyla, E ve F ise, $HEFD$ dörtgeninin alanı nedir?

Cevap: 192/25. ABC üçgeninde $AB \perp AC$ ve buradan da $|AH| \cdot |BC| = |AB| \cdot |AC|$ olduğundan $|AH| = 24/5$ olur. Pisagor teoreminden $|BH| = 18/5$, $|CH| = 32/5$ ve D orta nokta olduğundan $|HD| = 7/5$ olur. E ve F noktaları AHD üçgeninin çevrel çemberi üzerinde olduğundan $\angle AED = \angle AFD = 90^\circ$ olur. $|AD| = |BD| = |DC|$ olduğundan $|AE| = |EB| = 3$, $|AF| = |FC| = 4$ olur. Yani $EF \parallel HD$ ve $|EF| = |BC|/2 = 5$ buluruz. $EFDH$ bir yamuk olup EF kenarına ait yükseklik uzunluğu $|AH|/2 = 12/5$ tir. Bu yamukta orta taban uzunluğu $(|EF| + |HD|)/2 = 16/5$ tir. Alan ise $16/5 \cdot 12/5 = 192/25$ olur.

19. x, y, z pozitif gerçel sayılar olmak üzere, $(x^2 + y^3 + z^6)/(xyz)$ ifadesinin alabileceği en küçük değer nedir?

Cevap: $\sqrt[6]{432}$. AGO eşitsizliğinden

$$x^2 + y^3 + z^6 = \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{2}y^3 + \frac{1}{2}y^3 + z^6 \geq 6\sqrt[6]{\left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^2} xyz$$

olduğundan $(x^2 + y^3 + z^6)/(xyz) \geq 6\sqrt[6]{1/108} = \sqrt[6]{432}$ olur. Eşitlik durumu $(x, y, z) = (\sqrt{3}, \sqrt[3]{2}, 1)$ iken sağlanır.

20. Kendisinden küçük pozitif tam sayıların basamak sayılarının toplamı 2013 olan pozitif tam sayının rakamlarının toplamı nedir?

Cevap: 15. 100 den küçük pozitif tam sayılardaki basamak sayıları toplamı $9 + 2 \cdot 90 = 189$ ve 3 basamaklı tüm sayılarda $3 \cdot 900 = 2700$ basamak bulunduğundan istenen sayı 3 basamaklıdır. Sayı n olsun. $\Rightarrow 189 + 3(n - 100) = 2013. \Rightarrow n = 609$.

21. Bir $ABCD$ karesinin $[AB]$ ve $[CD]$ kenarları üstündeki sırasıyla, K ve L noktaları $|AK| = |CL|$ koşulunu sağlıyor. $[KL]$ üstündeki bir M noktası için, $s(\widehat{DAM}) = s(\widehat{MDL}) = 20^\circ$ ise, $s(\widehat{AKM})$ nedir?

Cevap: 65°. BD ve KL doğruları P de kesişsin. $DL \parallel KB$ ve $|DL| = |KB|$ olduğundan $|DP| = |PB|$ olur. $|AD| = |AB|$ olduğundan $AP \perp BD$ olur. $\angle ADM = 70^\circ$ ve $\angle DAM = 20^\circ$ olduğundan $\angle DMA = 90^\circ$ ve buradan da $DMPA$ bir kirişler dörtgeni olur. $\angle APK = \angle ADM = 70^\circ$ ve $\angle PAK = 45^\circ$ olduğundan $\angle AKM = 65^\circ$ bulunur.

22. On tabanındaki yazılımı yalnızca 0 ve 1 rakamlarından oluşan ve 7 ile bölünen bir pozitif tam sayının rakamlarının toplamı 7, 10, 18, 100, 2013 değerlerinin kaçını alabilir?

Cevap: 5. 1001 ve 10101 sayıları 7 ile bölünüyorlar. Bu nedenle yalnızca 0 ve 1 rakamlarından oluşan ve 7 ile bölünen bir pozitif tam sayının rakamlarının toplamı 1 dışında her değere eşit olabilir.

23. 100×100 bir satranç tahtasının üzerine tahtanın birim karelerinden oluşan ve birbirinin iç bölgelerini kesmeyen en fazla kaç tane 1×53 dikdörtgen yerleştirilebilir?

Cevap: 188. $\dfrac{100 \cdot 100}{53} = 188,6..$ olduğundan en fazla 188 tane 1×53 dikdörtgen yerleştirilebilir. 188 için örnek vardır: 100×100 satranç tahtasının merkezindeki 6×6 kare dışında kalan bölgeyi 4 tane 53×47 dikdörtgene ayıralım ve bu dikdörtgenlerin her birine 47 tane 1×53 dikdörtgen yerleştirelim.

24. $|AB| = |AC|$ olan bir ikizkenar ABC üçgeninin $[BC]$ kenarı üstündeki bir D noktasından AB ve AC doğrularına inilen dikmelerin ayakları sırasıyla, E ve F olmak üzere, $|DE| = 3$, $|DF| = 12$ ve $|AF| = 21$ ise, $|BC|$ nedir?

Cevap: $5\sqrt{10}$. Pisagor teoreminden $|AE|^2 + |ED|^2 = |AF|^2 + |DF|^2$ ve buradan da $|AE| = 24$ bulunur. $\triangle BED \sim \triangle CFD$ olduğundan $|CF| = 4|BE|$ ve $24 + |BE| = 21 + |CF|$ eşitliğini kullanarak $|BE| = 1$, $|CF| = 4$ elde ederiz. Pisagor teoreminden $|BD| = \sqrt{10}$ ve $|CD| = 4\sqrt{10}$ olacağından $|BC| = 5\sqrt{10}$ olur.

25. Karesinin basamak sayısı, kendisinin rakamlarının toplamına eşit olan en küçük altı pozitif tam sayının toplamı nedir?

Cevap: 208. Bir basamaklı sadece 1 var. İki basamaklı şartı sağlayan sayılar 12,21,30 ve 40. Üç basamaklı koşula uygun en küçük sayı 104 tür. $1 + 12 + 21 + 30 + 40 + 104 = 208$.

26. n takımın katıldığı bir futbol turnuvasında herhangi iki takım tam olarak bir kez karşılaşıyor ve kazanan takım 3, berabere kalan takımlar 1 er, yenilen takım 0 puan alıyor. Turnuva sona erdiğinde oluşan puan sıralamasında $n-1$ takımın puanları eşit olup bir takımın puanı diğer takımlardan 1 puan fazlaysa, n en az kaç olabilir?

Cevap: 5. $n = 2$ durumunda iki takımın puan farkı sadece 0 ve 2 olabilir. $n = 3$ durumunda üç takımın puanlarının $(3,2,2), (4,3,3), (5,4,4), (6,5,5)$ olamayacağı açıktır. $n = 4$ durumunda dört takımın puanlarının $(6,5,5,5), (5,4,4,4), (4,3,3,3), (3,2,2,2)$ olamayacağı açıktır. $n = 5$ durumunda koşullar sağlanabiliyor. Takımlar T_1,T_2,T_3, T_4, T_5 olsun. T_1 takımı T_2 ve T_3 takımlarını yenip T_4 ve T_5 takımlarına yenilsin, T_2 takımı T_3 ve T_5 takımlarıyla berabere kalıp T_4 takımını yensin, T_3 takımı T_4 takımıyla berabere kalıp T_5 takımını yensin, T_4 takımı T_5 takımı ile berabere kalsın. Bu durumda takımların puanları $(6,5,5,5,5)$ olur ve koşullar sağlanır.

27. $|AC| = 8$, $|BC| = 9$ ve $|AB| = 7$ olan bir ABC üçgeninin A köşesinden BI ve CI iç açıortaylarına inilen dikmelerin ayakları arasındaki uzaklık nedir?

Cevap: 3. A köşesinden BI ve CI iç açıortaylarına inilen dikmelerin ayakları sırasıyla U ve V, AU ve AV doğrularının BC kenarını kestiği noktalar sırasıyla D ve E olsun. BU ve CV doğruları sırasıyla ABC ve ACB açılarının iç açıortayı olduğundan $|AU| = |UD|$, $|AV| = |VE|$, $|AB| = |BD| = 7$ ve $|AC| = |CE| = 8$ olmalıdır. Buradan $|BE| = 1$, $|DC| = 2$, $|DE| = 6$ olur. $UV \parallel BC$ olacağından benzerlik kullanılarak $|UV| = |DE|/2 = 3$ olur.

28. Bir çember üstünde yer alan 101 noktadan biri kırmızıya, diğerleri beyaza boyanmıştır. Bir köşesi kırmızı diğer köşeleri beyaz noktalarda yer alan dışbükey çokgenlerin sayısını K, tüm köşeleri beyaz noktalarda yer alan dışbükey çokgenlerin sayısını da B ile gösterirsek, $K-B$ nedir?

Cevap: 4950. Köşeleri beyaz noktalarda yer alan herhangi bir dışbükey çokgene sadece kırmızı nokta eklenerek bir köşesi kırmızı diğer köşeleri beyaz noktalarda yer alan çokgen elde edilir. Demek ki cevap bir köşesi kırmızı nokta olan üçgen sayısına eşittir: $K - B = \binom{100}{2} = 4950$.

29. $|x| \leq 1$, $|y| \leq 1$ ve $x + 2y = 1$ koşullarını sağlayan x ve y gerçel sayıları için, $\sqrt{24(1-x^2)} + \sqrt{21(1-y^2)}$ ifadesinin alabileceği en büyük değer nedir?

Cevap: 9. AGO eşitsizliğine göre

$$12(1-x) + 8(1+x) \geq 2\sqrt{96(1-x^2)}$$

ve

$$14(1-y) + 6(1+y) \geq 2\sqrt{84(1-y^2)}$$

Bu eşitsizlikleri taraf tarafa toplarsak, $x + 2y = 1$ olduğundan

$$\sqrt{24(1-x^2)} + \sqrt{21(1-y^2)} \leq 9$$

elde ederiz. Eşitlik $x = \dfrac{1}{5}$ ve $y = \dfrac{2}{5}$ durumunda sağlanır.

30. $[AB]$ çaplı bir çember, $[AC]$ ve $[BC]$ doğru parçalarını ikinci kez sırasıyla, D ve E noktalarında kesiyor. D, $[AC]$ nin orta noktası, $|AB| = 25$ ve $|AC| = 10$ ise, $|AE|$ nedir?

Cevap: $4\sqrt{6}$. $[AB]$ çemberin çapı olduğundan $BD \perp AC$ ve $AE \perp BC$ olur. $|AD| = |DC|$ ve $BD \perp AC$ olduğundan $|BC| = |AB| = 25$ olur. Çemberde kuvvetten $|CD| \cdot |CA| = |CE| \cdot |CB|$ ve buradan da $|CE| = 2$ buluruz. Pisagor teoreminden $|AE| = \sqrt{|AC|^2 - |CE|^2} = 4\sqrt{6}$ olur.