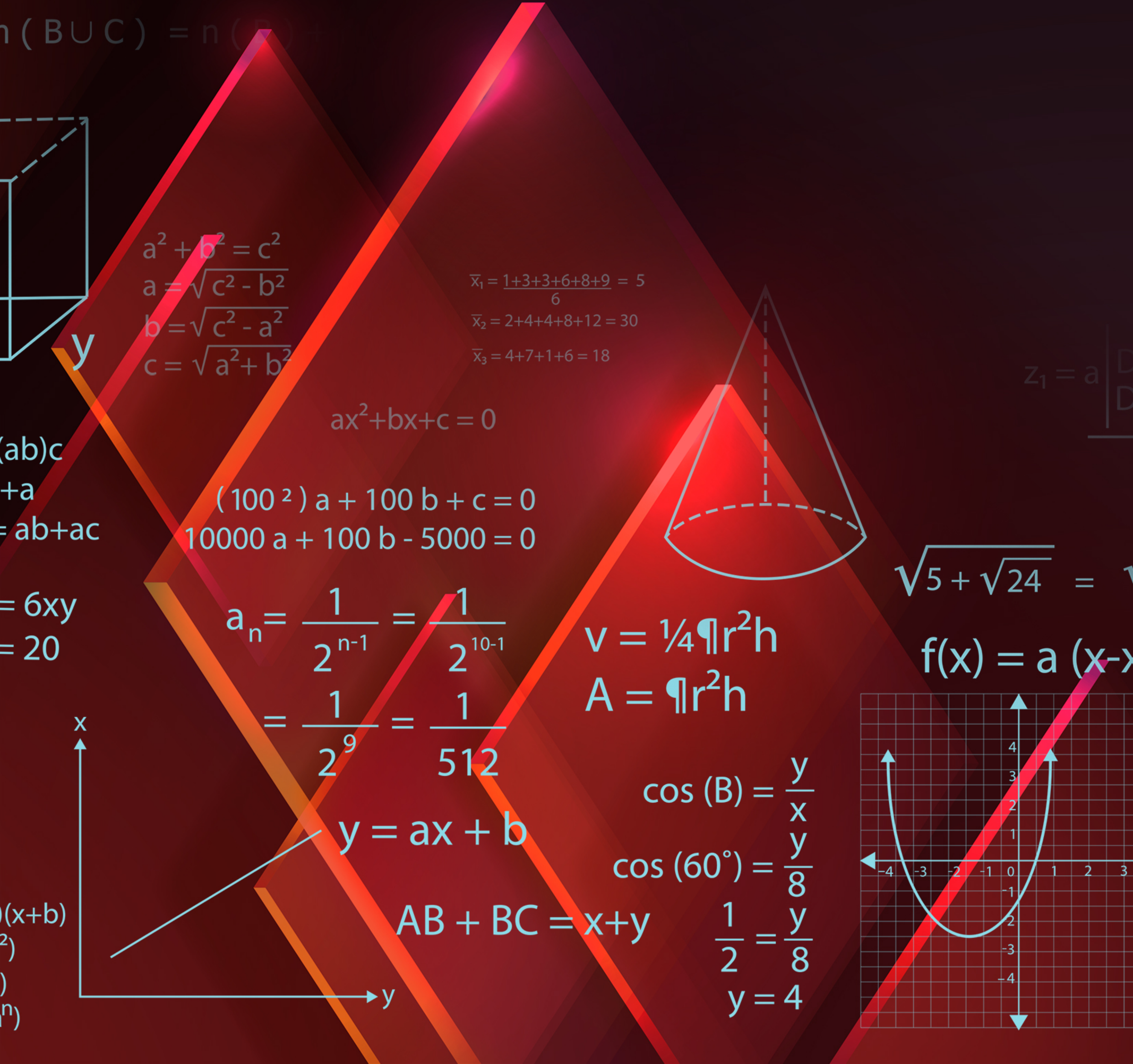
TÜBİTAK

Türkiye Cumhuriyeti
SANAYİ VE TEKNOLOJİ BAKANLIĞI

MATEMATİK

17. ULUSAL İLKÖĞRETİM
MATEMATİK OLİMPİYATI
BİRİNCİ AŞAMA SINAV
SORU VE ÇÖZÜMLERİ

2012



TÜRKİYE BİLİMSEL VE TEKNOLOJİK ARAŞTIRMA KURUMU
BİLİM İNSANI DESTEK PROGRAMLARI BAŞKANLIĞI

ULUSAL MATEMATİK OLİMPİYATLARI SORU ve ÇÖZÜMLERİ

Ankara

Nisan 2019

1. x pozitif gerçel sayısının %15 i ve %66 sı tam sayıdır. x sayısının %15 i en az kaç olabilir?

Cevap: 5. x sayısının %15 i tam sayı olduğundan, k bir tam sayı olmak üzere, $x = \dfrac{100k}{15}$. x sayısının %66 sı tam sayı olduğundan $\dfrac{66k}{15} = \dfrac{33k}{5}$ bir tam sayıdır. Buradan $k \geq 5$ ve x sayısının alabileceği en küçük değer $\dfrac{100}{3}$ olur.

2. $\{1, 2, \ldots, 17\}$ kümesinin farkları 4 olan herhangi iki eleman içermeyen kaç alt kümesi vardır?

Cevap: 6656. $\{1, 2, \ldots, 17\}$ kümesini $\{1, 5, 9, 13, 17\}$, $\{2, 6, 10, 14\}$, $\{3, 7, 11, 15\}$, $\{4, 8, 12, 16\}$ alt kümelerine ayıralım. $\{1, 5, 9, 13, 17\}$ kümesinin farkları 4 olan herhangi iki eleman içermeyen alt küme sayısı 13'e eşittir (boş küme, 5 tane bir elemanlı, 6 tane iki elemanlı ve 1 tane üç elemanlı). $\{2, 6, 10, 14\}$, $\{3, 7, 11, 15\}$ ve $\{4, 8, 12, 16\}$ kümelerinin her birinin farkları 4 olan herhangi iki eleman içermeyen alt küme sayısı 5'e eşittir (boş küme, 4 tane bir elemanlı, 3 tane iki elemanlı). Sonuç olarak $\{1, 2, \ldots, 17\}$ kümesinin farkları 4 olan herhangi iki eleman içermeyen alt kúme sayısı $13 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 = 6656$ olur.

3. $|AB| = 4$, $|BC| = 3$ ve $s(\widehat{ABC}) = 90^\circ$ olan bir ABC üçgeninde B köşesine ait yüksekliğin ayağı D noktası ve D den $[BC]$ kenarına inen dikmenin ayağı da E noktası ise, $|BE|$ nedir?

Cevap: 48/25. Pisagor teoreminden $|AC| = 5$ tir. $|BD| \cdot |AC| = |AB| \cdot |BC|$ olduğundan $|BD| = 12/5$ olur. BDC üçgeninde Öklit bağıntısından $|BE| = |BD|^2/|BC| = 48/25$ olur.

4. $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ rakamlarının her birini bir kez kullanarak 11 ile bölünen yedi basamaklı kaç farklı sayı yazılabilir?

Cevap: 576. Sayı $abcdefg$ olsun. Sayının 11 ile bölünmesi için $(a + c + e + g) - (b + d + f) = (a + b + c + d + e + f + g) - 2(b + d + f) = 28 - 2(b + d + f)$ sayısının 11 ile bölünmesi gerekir. Bu durum yalnızca $b + d + f \equiv 3 \pmod{11}$ iken gerçekleşir. Ancak rakamlar 1 ile 7 arasında olduğundan $b + d + f$ sadece 14 olabilir. O halde $\{b, d, f\}$ kümesi $\{1, 6, 7\}, \{2, 5, 7\}, \{3, 4, 7\}, \{3, 5, 6\}$ kümelerinden birine eşittir. b, d, f için sayılar $3! = 6$ şekilde, a, c, e, g için ssayıar $4! = 24$ şekilde yerleştirilebilir. Dolayısıyla sonuç $4 \cdot 6 \cdot 24 = 576$.

5. x pozitif gerçel sayısının tam sayı ve kesirli kısımlarının çarpımı 2 den, y pozitif gerçel sayısının tam sayı ve kesirli kısımlarının çarpımı da 3 ten küçük değilse, xy en az kaç olabilir?

Cevap: $\dfrac{209}{12}$. $[x]\cdot\{x\} \geq 2$ olduğundan $[x] > 2$ olur ve buradan da x sayısının en küçük değerinde $[x] = 3$ ve $\{x\} = \dfrac{2}{3}$ olur. $[y]\cdot\{y\} \geq 3$ olduğundan $[y] > 3$ olur ve buradan da y sayısının en küçük değerinde $[x] = 4$ ve $\{y\} = \dfrac{3}{4}$ olur. Sonuç olarak xy en az $\dfrac{11}{3}\cdot\dfrac{19}{4} = \dfrac{209}{12}$ olur.

6. Bir ABC üçgeninde $[AB]$ kenarı üstündeki D noktası ve $[AC]$ kenarı üstündeki E noktası için, $s(\widehat{AED}) = s(\widehat{ABC})$, $|AE| = 2$, $|AD| = 5$ ve $|BD| = 3$ ise, $|CE|$ nedir?

Cevap: 18. $\angle DBC = \angle DEA$ olduğundan $BDEC$ bir kirişler dörtgeni olur. Çemberde kuvvetten $|AD|\cdot|AB| = |AE|\cdot AC|$ ve buradan da $|AC| = 20$, $|CE| = 18$ buluruz.

7. Dördü beyaz, dördü kırmızı tişört giyen sekiz öğrenci ikişer kişilik dört sıraya farklı renkte tişört giyen iki öğrenci aynı sırada oturmamak koşuluyla kaç farklı biçimde oturabilir?

Cevap: 3456. Beyaz renkli tişört giyen öğrencilerin sıralarını belirleyip 4 öğrenciyi o sıralara yerleştirelim ve daha sonra kırmızı renkli tişört giyen öğrencileri kalan iki sıraya yerleştirelim:

$$\binom{4}{2}4!4! = 3456.$$

8. Tüm pozitif tam sayı kuvvetlerinin on tabanına göre yazılımının son iki basamağı aynı olan kaç tane iki basamaklı sayı vardır?

Cevap: 2. Sayı n olsun. İstenen koşulun gerçekleşmesi için gerek ve yeter şart $n^2 \equiv n \pmod{100}$ olmasıdır. $\Rightarrow 4|n(n-1)$ ve $25|n(n-1)$. $\Rightarrow n \equiv 0,1 \pmod 4$ ve $n \equiv 0,1 \pmod{25}$. O halde $n \equiv 0,1,25,76$ (mod 100). Koşula uygun iki basamaklı sayılar 25 ve 76 dır.

9. $s(\widehat{BAC}) = 90^\circ$ olan bir ABC üçgeninin $[AC]$ kenarına ait bir D noktası için, BD doğrusu ile $[AH]$ yüksekliği E noktasında kesişiyor. $|BH| = 3$, $|CH| = 12$ ve $|EH| = 2|EA|$ ise, $|DE|$ nedir?

Cevap: 20/11. Öklit teoreminden $|AH| = \sqrt{|CH| \cdot |HB|} = 6$ ve buradan da $|AE| = 2$, $|EH| = 4$ olur. Pisagor teoreminden $|BE| = 5$ buluruz. Menelaus teoreminden $(|BH|/|BC|) \cdot (|CD|/|DA|) \cdot (|AE|/|EH|) = 1$ ve buradan da $|CD|/|DA| = 10$ olur. Yine Menelaus teoreminden $(|AD|/|AC|) \cdot (|CH|/|HB|) \cdot (|BE|/|ED|) = 1$ ve buradan da $|DE| = 20/11$ buluruz.

10. $\sqrt{n+9-6\sqrt{n}} + \sqrt{n+25-10\sqrt{n}} = 2$ denklemini sağlayan n tam sayılarının toplamı nedir?

Cevap: 289. $\sqrt{n+9-6\sqrt{n}} = |\sqrt{n}-3|$ ve $\sqrt{n+25-10\sqrt{n}} = |\sqrt{n}-5|$ olduğu görülür. $|\sqrt{n}-3| + |\sqrt{n}-5| = 2$ olması ancak $3 \le \sqrt{n} \le 5$ olması ile mümkündür. Yani şartı sağlayan n tam sayıları $9 \le n \le 25$ ile ifade edilir. Bunların toplamı 289 dur.

11. 18 takımın katıldığı bir futbol turnuvasında herhangi iki takım tam olarak bir kez karşılaşıyor ve kazanan takım 3, berabere kalan takımlar 1 er, kaybeden takım 0 puan alıyor. Turnuva sona erdiğinde oluşan puan sıralamasında ardışık sıralarda yer alan iki takım arasındaki puan farkı en çok kaç olabilir?

Cevap: 35. Puan farkları en çok olan ardışık sıralardaki takımlar k. ve $(19-m)$. sıralarda olsunlar (ilk k takımın en kötüsü ve son m takımın en iyisi). k. sıradakı takımın puanının en fazla olduğu durum ilk k takımın kendi aralarında berabere kalmadıkları, kalan takımları yendikleri ve puanlarının eşit olduğu durumdur. Bu durumda k. sıradaki takımın toplam puanı

$$\frac{3\binom{k}{2} + 3km}{k} = \frac{3k+6m-3}{2}$$

olur. $(19-m)$. sıradakı takımın puanının en az olduğu durum son m takımın kendi aralarında berabere kaldıkları, ilk k takıma yenildikleri ve puanlarının eşit olduğu durumdur. Bu durumda $(19-m)$. sıradaki takımın toplam puanı

$$\frac{2\binom{m}{2}}{m} = m-1$$

olur. Bu nedenle bu iki puanın farkı

$$\frac{3 \cdot 18 + m - 1}{2} \le 35$$

olur. Eşitlik durumu $k = 1$ ve $m = 17$ iken sağlanır. Bu durumda birinci sıradaki takım tüm takımları yenir ve tüm diğer maçlar beraberlikle sonuçlanır.

12. $s(\widehat{ABC}) = 50°$ olan bir ABC üçgeninin $[AB]$ ve $[AC]$ kenarlarını sırasıyla, D ve E noktalarında kesen doğru, üçgenin çevrel çemberine A noktasında teğet olan doğruya paraleldir. $s(\widehat{EDC}) = 20°$ ise, $s(\widehat{DBE})$ nedir?

Cevap: $30°$. Teğet-kiriş açı ve paralellikten $\angle AED = \angle ABC$ buluruz. Yani $EDBC$ bir kirişler dörtgenidir. $\angle EBC = \angle EDC = 20°$ olacağından $\angle DBE = 30°$ olur.

13. n bir pozitif tam sayı olmak üzere, $2^n + 3^n + 4^n$ sayısının on tabanına göre yazılımının sondan en çok kaç basamağı 9 olabilir?

Cevap: 2. $n = 3$ ise $2^3 + 3^3 + 4^3 = 99$ olur. Şimdi sayının sondan en çok iki basamağının 9 olabileceğini gösterelim. $n = 1$ ise $2^1 + 3^1 + 4^1 = 9$, $n = 2$ ise $2^2 + 3^2 + 4^2 = 29$ olur. $n > 3$ olsun. $2^n + 3^n + 4^n$ sayısının sondan en az üç basamağı 9 olursa, $2^n + 3^n + 4^n + 1$ sayısı 1000 ve dolayısıyla 8 ile bölünür. Fakat $8|2^n$, $8|4^n$ ve $3^n = 1, 2 \pmod 8$, çelişki.

14. A gerçel sabitinin kaç farklı değeri için, $x^3 + y^3 = 5xy$ ve $x + y = A$ eşitliklerinin her ikisini de sağlayan tam olarak bir (x, y) gerçel sayı ikilisi vardır?

Cevap: 2. $B = xy$ olarak tanımlayalım. $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2) = A(A^2 - 3B)$ olduğundan verilen denklem $A(A^2 - 3B) = 5B$, yani $A^3 = (3A + 5) \cdot B$ şeklinde ifade edilebilir. Bu durumda B için en fazla bir geçerli değer bulunacağı açıktır. Verilmiş A ve B değerleri için, $B > \frac{A^2}{4}$ ise hiç (x, y) gerçel sayı ikilisi bulunmaz, $B < \frac{A^2}{4}$ ise tam olarak iki (x, y) gerçel sayı ikilisi bulunur ve $B = \frac{A^2}{4}$ ise tam olarak bir (x, y) gerçel sayı ikilisi bulunur. Yani $A^3 = (3A + 5) \cdot \frac{A^2}{4} \Leftrightarrow A^3 = 5A^2$ sağlanmalıdır. Bunu sağlayan A sabitleri 0 ve 5 tir.

15. $|AB| = 2$ ve $|AD| = 2\sqrt{2}$ olan bir $ABCD$ dikdörtgeninde $[AD]$ nin orta noktası E, $[AE]$ nin orta noktası da F dir. AC ve BE doğruları G noktasında kesişiyorsa, $|FG|$ nedir?

Cevap: $1/\sqrt{2}$. Pisagor teoreminden $|BE| = \sqrt{6}$ ve $|AC| = 2\sqrt{3}$ olur. Benzerlikten $|AG|/|GC| = |EG|/|BG| = |AE|/|BC| = 1/2$ ve buradan da $|AG| = 2\sqrt{3}/3$, $|EG| = \sqrt{6}/3$ olur. Kenarortay teoreminden $|FG|^2 = (|AG|^2 + |EG|^2)/2 - |AF|^2 = 1/2$ ve $|FG| = 1/\sqrt{2}$ buluruz.

16. Ahmet 30 şekeri, herhangi iki günde yediği şeker sayısının farkı 3 e bölünmemek koşuluyla üç günde kaç farklı biçimde yiyebilir?

Cevap: 330. Koşullara göre a, b, c negatif olmayan tam sayılar ve (x, y, z) üçlüsü $(0, 1, 2)$'nin bir permütasyonu olmak üzere, Ahmet ilk gün $3a + x$, ikinci gün $3b + y$ ve üçüncü gün $3c + z$ şeker yiyecektir. $x + y + z = 3$ olduğundan $a + b + c = 9$ olur. Buna göre cevap:

$$\binom{9+3-1}{3-1} 3! = 330.$$

17. Bir pozitif tam sayının basamak sayısı ile küpünün basamak sayısının toplamı 2012 den büyük olmayan kaç farklı değer alabilir?

Cevap: 1509. n sayısının basamak sayısını $s(n)$ ile gösterelim. $f(n) = s(n) + s(n^3)$ olmak üzere, soruda $f(n)$ nin 2012 den büyük olmayan kaç değeri alabileceği soruluyor. Kolayca görüleceği üzere $s(n+1) - s(n) \in \{0, 1\}$. Öte yandan her n pozitiif tam sayısı için $(n+1)^3 < 10 \cdot n^3$ olduğundan $s((n+1)^3) - s(n^3)$ farkı da ya 0 ya da 1 dir. Kolayca görüleceği üzere iki farkın da 1 olduğu durum ancak $n + 1$ sayısı 10'un bir tam kuvveti iken gerçekleşir. O halde $n \neq 10^k - 1$ ise $f(n+1) - f(n) \in \{0, 1\}$, $n = 10^k - 1$ ise $f(n+1) - f(n) = 2$. O zaman f fonksiyonu her k doğal sayısı için $f(10^k) = 4k + 2$ den $f(10^{k+1} - 1) = 4(k+1) + 2 - 2 = 4k + 4$ e kadar olan değerleri alr. Sonuç olarak f fonksiyonu sadece $4k + 1$ formundaki değerleri alamaz. $1, 2, \ldots, 2012$ sayılarından 503 tanesi $4k + 1$ formundadır ve dolayısıyla cevap $2012 - 503 = 1509$.

18. Bir ABC üçgeninde $[BC]$ kenarına D noktasında, AC doğrusuna da A noktasında teğet olan bir çember $[AB]$ kenarını E noktasında kesiyor. $|BD|/|AC| = 2$ ve $|AE|/|BD| = 5/6$ ise, AD ve CE doğrularının kesişim noktası F için, $|AF|/|FD|$ nedir?

Cevap: 15/4. $|AE| = 5x$, $|BD| = 6x$, $|AC| = 3x$ olsun. $|CD| = |AC| = 3x$ olur. $|BE| = y$ dersek çemberde kuvvetten $y(y + 5x) = 36x^2$ ve buradan da $(y + 9x)(y - 4x) = 0$ ve $y > 0$ olacağından $y = 4x$ olur. Menelaus teoreminden $(|CD|/|CB|) \cdot (|BE|/|AE|) \cdot (|AF|/|FD|) = 1$ ve buradan da $|AF|/|FD| = 15/4$ olur.

19. x ve y pozitif gerçel sayılar olmak üzere, $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}+\dfrac{x^2}{y^2}+\dfrac{y^2}{x^2}=18$ ise, $\dfrac{(x-y)^2}{xy}$ nedir?

Cevap: 2. $a=\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}$ olarak tanımlayalım. $\dfrac{(x-y)^2}{xy}=a-2$ dir. $\dfrac{x^2}{y^2}+\dfrac{y^2}{x^2}=a^2-2$ dir. Verilen denklem $a+a^2-2=18$, yani $(a-4)(a+5)=0$ halini alır. x,y pozitif olduğundan $a>0$ yani $a=4$ olmalıdır, $a-2=2$ bulunur.

20. Bir çember etrafına yazılmış hepsi 0 olmayan n tane sayının her biri iki komşusunun toplamına eşitse, n sayısı $2012, 2013, 2014, 2015$ sayılarından hangisi olabilir?

Cevap: Hiçbiri. Sayılar $a, b, b-a, -a, -b, a-b, a, b, ...$ şeklinde olmak zorundadır. O zaman $n=6k$ olabilir. $r=1,2,3,4,5$ olmak üzere, $n=6k+r$ durumlarının her birinde $a=b=0$ olmak zorundadır.

21. Düzlemdeki noktalardan oluşan bir A kümesindeki her nokta için, o nokta merkezli ve birim yarıçaplı çember A nın tam olarak üç noktasından geçiyorsa, A nın en az kaç elemanı olabilir?

Cevap: 6. $n=4$ olursa, düzlemde herhangi ikisinin arasındaki uzaklık 1 birim olan dört nokta olur, çelişki. $n=5$ olursa, aralarındaki uzaklık 1 birim olan nokta ikilisi sayısı $\frac{5\cdot 3}{2}$ olur, çelişki. $n=6$ için örnek: $A=\{(0,0),(1,0),(0,1),(1,1),(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}),(\frac{1}{2},1+\frac{\sqrt{3}}{2})\}$.

22. $7\cdot 2^n+1$ sayısının tam kare olmasını sağlayan kaç n pozitif tam sayısı vardır?

Cevap: 1. $7\cdot 2^n+1=m^2$. $\Rightarrow 7\cdot 2^n=(m-1)(m+1)$. O halde $m-1$ ve $m+1$ sayılarından biri 2 nin bir kuvveti diğeri ise 2 nin bir kuvvetinin 7 katıdır. Bu iki sayının ikisinin de tek olamayacağını görmek kolay. O zaman ikisi de çift sayıdır. Ayrıca farkları 2 olduğundan biri $4k+2$ formunda olmalı. Dolayısıyla biri 2 veya $7\cdot 2=14$ olmalı. Bu durumda da tek çözümün $m-1=14$ ve $m+1=16$ olduğu görüllür. Sonuç olarak tek çözüm $n=5$ tir.

23. $2x^2 - 4xy + 5y^2 = 4x + 2y - 5$ eşitliğini sağlayan kaç (x, y) gerçel sayı ikilisi vardır?

Cevap: 1. Verilen eşitlik $(x - 2y)^2 + (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 0$ şeklinde ifade edilebilir. Açıkça tek çözüm $(x, y) = (2, 1)$ dir.

24. Köşeleri, kenar uzunlukları $|AB| = 10$, $|BC| = 21$ ve $|CA| = \sqrt{205}$ olan bir ABC üçgeninin kenarları üstünde yer alan ve çevresi 32 birim olan bir dikdörtgenin uzun kenarının uzunluğu kaç birimdir?

Cevap: 14. $|AB|^2 + |AC|^2 = 305 < |BC|^2 = 441$ olduğundan $\angle BAC > 90°$ dir. Bu yüzden dikdörtgenin bir kenarı BC kenarı üzerinde olmalıdır. BC kenarı üzerindeki kenarın uzunluğu q diğer kenarın uzunluğu p ve ABC üçgeninde A köşesine ait yükseklik uzunluğu h olsun. Dikdörtgenin AB kenarı üzerindeki köşesi D olsun. Benzerlikten $p/h = |BD|/|AB|$ ve $q/21 = |AD|/|AB|$ olduğundan $p/h + q/21 = 1$ olur. A köşesine ait yüksekliğin ayağı E olsun. Pisagor teoreminden $|CE|^2 - |BE|^2 = |AC|^2 - |AB|^2 = 105$ ve $|CE| + |BE| = |BC| = 21$ olduğundan $|CE| = 13, |BE| = 8$ ve buradan da $h = 6$ elde ederiz. Yani $7p + 2q = 42$ olur. Öte yandan $p + q = 16$ olduğundan $p = 2, q = 14$ olur.

25. Her hamlede, başlangıçta her birinde eşit sayıda şeker olan n öğrenciden biri elindeki şekerlerin bir kısmını diğer öğrencilere eşit olarak dağıtıyor. n nin kaç farklı değeri için, sonlu sayıda hamle sonucunda öğrencilerden birinin elinde 36, bir diğerinin elinde de 21 şeker bulunması sağlanabilir?

Cevap: 3. Bir öğrenci diğer öğrencilerin her birine l şeker verirse, kendi şekerlerinin sayısı $l(n - 1)$ azalır. Bu nedenle herhangi iki öğrencinin şekerlerinin farkı her zaman n ile bölünüyor. $36 - 21 = 15$ olduğundan $n|15$ olma zorundadır. Buradan n'nin alabileceugi değerler $3, 5, 15$ olur. Bu durumların her biri için örnek verelim. $n = 3$: $(31, 31, 31) \to (21, 36, 36)$. $n = 5$: $(33, 33, 33, 33, 33) \to (21, 36, 36, 36, 36)$. $n = 15$: $(35, 35, 35, 35, 35, 35, 35, 35, 35, 35, 35, 35, 35, 35, 35) \to (21, 35, 35, 35, 35, 35, 35, 35, 35, 35, 35, 35, 35, 35, 35)$.

26. $a^2+a+34 = b^2$ eşitliğini sağlayan kaç (a, b) pozitif tam sayı ikilisi vardır?

Cevap: 4. Eşitliği 4 ile çarparsak $(2a + 1)^2 + 135 = (2b)^2$ elde edilir. $\Rightarrow$ $(2b - 2a - 1)(2b + 2a + 1) = 135 = 3^3 \cdot 5$. Pozitif tam sayı çözümleri aradığımızdan iki çarpan da pozitif ve sağdaki soldakinden büyük olmalı. $1 \cdot 135$, $3 \cdot 45$, $5 \cdot 27$ ve $9 \cdot 15$ durumlarından sırasıyla $(33, 34), (10, 16), (5, 8)$ ve $(1, 6)$ çözümleri elde edilir.

27. C, $[AB]$ çaplı çemberin dış bölgesinde yer alan bir nokta olmak üzere, AC ve BC doğruları çemberi ikinci kez sırasıyla, D ve E noktalarında kesiyor. AE ve BD doğrularının kesişim noktası F, AB ve CF doğrularının kesişim noktası da G olmak üzere, $|AF| = 12$ ve $s(\widehat{EDC}) = 60^\circ$ ise, $|AG|$ nedir?

Cevap: $6\sqrt{3}$. ABC üçgeninde $[BD]$ ve $[AE]$ birer yükseklik olduğundan $[CG]$ de yükseklik olmalıdır. Yani $\angle FGA = 90^\circ$ olur. $\angle AEB = \angle ADB = 90^\circ$ olduğundan $ADEB$ bir kirişler dörtgeni olup $\angle EBA = \angle EDC = 60^\circ$ ve buradan da $\angle FAG = 30^\circ$ buluruz. Yani $|AG| = |AF|\sqrt{3}/2 = 6\sqrt{3}$ elde ederiz.

28. $3x + 2y + z = 12$ koşulunu sağlayan x, y, z negatif olmayan gerçel sayıları için, $x^3 + y^2 + z$ ifadesinin alabileceği en küçük değer nedir?

Cevap: 9. $x^3 - 3x + 2 = (x + 2)(x - 1)^2 \geq 0$ olduğundan $x^3 \geq 3x - 2$ dir. $y^2 - 2y + 1 = (y - 1)^2 \geq 0$ olduğundan $y^2 \geq 2y - 1$ dir. O halde, $x^3 + y^2 + z \geq 3x + 2y + z - 3 = 9$ dur. $x = 1, y = 1, z = 7$ sayıları için verilen koşul sağlanır ve $x^3 + y^2 + z = 9$ olur.

29. 1×17 bir satranç tahtasının karelerine $1, 2, \ldots, 17$ sayıları sırayla ve 1 den sonraki her sayı daha önce yazılmış sayılardan birine komşu olmak koşuluyla kaç farklı biçimde yazılabilir?

Cevap: $2^{16} = 65536$. 1 sayısının sağındaki sayılar artan, solundaki sayılar ise azalan sırada dizilecekler. Bu nedenle $1, 2, \ldots, 17$ sayılarının dizilişini 1 sayısının solundaki sayıların kümesi belirliyor.

30. Dar açılı bir ABC üçgeninde $[AD]$, $[BE]$ ve $[CF]$ yükseklikleri H noktasında kesişiyor. $|AH| \cdot |AD| + |BH| \cdot |BE| + |CH| \cdot |CF| = 71$ ve $|AB|^2 + |AC|^2 = 106$ ise, $|BC|$ nedir?

Cevap: 6. Pisagor teoreminden $|BC|^2 = |BE|^2 + |EC|^2 = |AB|^2 - |AE|^2 + |EC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2 - 2|AE| \cdot |AC|$ dir. $DHEC$ bir kirişler dörtgeni olduğundan $|AH| \cdot |AD| = |AE| \cdot |AC|$ ve böylece $|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2 - 2|AH| \cdot |AD|$ elde ederiz. Benzer şekilde $|CA|^2 = |BC|^2 + |AB|^2 - 2|BH| \cdot |BE|$ ve $|AB|^2 = |BC|^2 + |CA|^2 - 2|CH| \cdot |CF|$

olur. Bu üç eşitliği taraf tarafa toplarsak $|AB|^2 + |BC|^2 + |CA|^2 = 2(|AH|\cdot|AD|+|BH|\cdot|BE|+|CH|\cdot|CF|)$ buluruz. Buradan da $|BC|^2 = 2 \cdot 71 - 106 = 36$ ve $|BC| = 6$ olur.