16. ULUSAL İLKÖĞRETİM MATEMATİK OLİMPİYATI SORULARI VE ÇÖZÜMLERİ

www.sbelian.wordpress.com

Her yıl ilköğretim öğrencileri için TÜBİTAK BAYG tarafından düzenlenen Ulusal İlköğretim Matematik Olimpiyatları sınavının 16.'sının sınav soruları ve bu soruların bir kısmının çözümleri ilerleyen sayfalarda verilmiştir. Soruların tamamının yayın hakkı yalnızca TÜBİTAK ve izin almış yayınevlerine aittir. Sizde soruların tamamı için çözümleri içeren kitaplar alabilirsiniz

Umarız faydalı bir çalışma olmuştur.

Kolay gelsin.

SBELİAN

$\boxed{\Sigma}$

1. Bir bardakta bulunan 100 gram şekerli suyun %98 i sudur. Bir süre sonra suyun buharlaşması sonucu suyun kütlece %96 ya düştüğünde şekerli suyun kütlesi kaç gram olur?

a) 50 b) 64 c) 95 d)96 e) Hiçbiri

Çözüm. Eğer 100 gr şekerli suyun %98 i su ise bu karışımın 98 gr su + 2 gr şeker vardır. Eğer karışım kaynatılırsa x gram su buharlaşır. Buna göre, (98-x) gram su + 2 gram şeker oluşur. Buradan,

$$\frac{98-x}{100-x}=\frac{96}{100}$$

ise

$$98.100-100.x=96.100-96.x$$
$$4x=2.100$$
$$x=50$$

Buna göre, yeni karışımın kütlesi 100-50 = 50 gr olur.
Doğru cevap "A" seçeneğidir.

2. $m \leq n$ olmak üzere; en büyük ortak bölenleri 11, toplamları 165 olan kaç tane (m,n) pozitif tam sayı ikilisi vardır?

a) 8 b) 7 c) 6 d) 5 e) 4

Çözüm. $m \leq n$, $ebob(m,n)=11$, $m+n=165$ ise m=11k ve n=11t olarak alınabilir. Buna göre,

$$11k+11t=165 \Rightarrow k+t=15$$

ise istenen (m,n) ikilileri

$$(m,n)=\{(11,154),(22,143),(44,121),(77,88)\}$$

olacaktır. Toplam 4 tane ikili vardır.

Doğru cevap "E" seçeneğidir.

3. ABCD bir dışbükey dörtgen olmak üzere, ABC üçgeninin iç bölgesindeki bir E noktası $|BE|=|AD|$, $|AE|=|CD|$ ve $s(AEB)=s(ADC)$ koşullarını sağlıyor. $s(EAC)=30^o$ ve $s(ACD)=40^o$ ise, $s(BCD)$ nedir?

a) 100^o b) 95^o c) 90^o d) 85^o e) 80^o

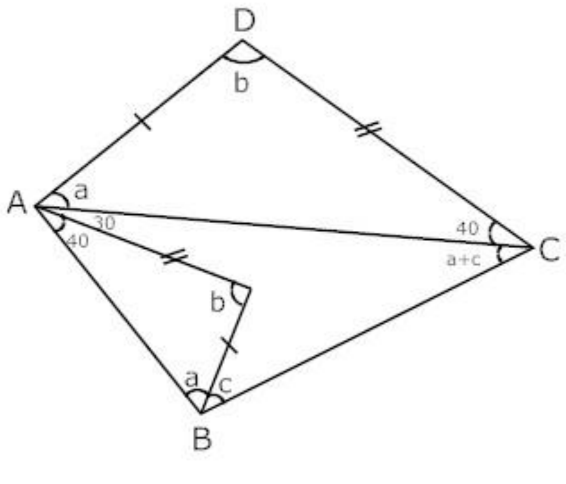
Çözüm. Soruda verilen şekli çizersek, 180-70 =110,

$$\frac{110}{2}=55^o=m(ACB)=a+c$$

$$m(BCD)=40^o+a+c$$
$$=40^o+55^o$$
$$=95^o$$

olarak bulunacaktır.

Doğru cevap "B" seçeneğidir.



4. A ve B harfleri rakamları belirtmek üzere, on tabanına göre yazılımı 3A4B olan bir sayının 45 ile bölümünden kalanın 17 olmasını sağlayan kaç (A,B) ikilisi vardır?

a) 3 b) 2 c) 1 d) 0 e) Hiçbiri

Çözüm. Soruda verilen bilgilere göre,

$$3A4B \equiv 17 \pmod{45}$$

olacaktır. Eğer bu denkliği düzenlersek,

$$3000 + 40 + 100A + B \equiv 17 \pmod{45}$$

olacağından

$$10A + B \equiv 30 \pmod{45}$$

denkliği elde edilecektir. Buna göre istenilen ikililer

$$\{(3,7),(8,2)\}$$

olacaktır.

Doğru cevap "B" seçeneğidir.

5. $\{50,100,1000,2000,2010,2011,2012,3000\}$ kümesinin üç elemanlı kaç alt kümesinin elemanları toplamı 3 ile bölünür?

a) 30   b) 27   c) 24   d) 20   e) 18

Çözüm. $\{50,100,1000,2000,2010,2011,2012,3000\}$ kümesine $(\mathrm{mod}\,3)$ altında bakalım. Buna göre yeni kümemiz

$$\{2_1,1_1,1_2,2_2,0_1,2_3,0_3\}$$

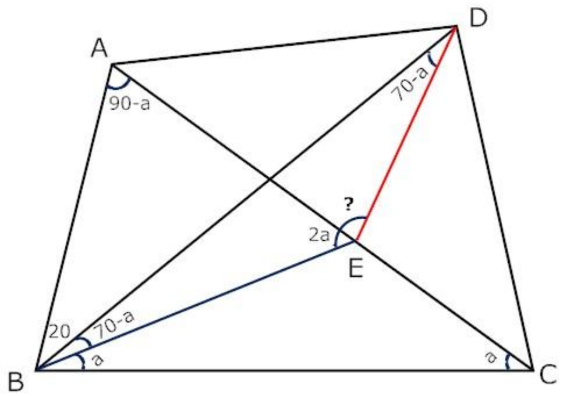
olacaktır. Oluşacak 3 elemanlı alt kümelerin elemanları toplamı 3 ile bölüneceğine göre, alt kümelerimiz

$$(0,0,0),(1,1,1),(1,2,0),(2,2,2)$$

formatında olacaktır. Öyleyse altküme sayılarımız,
(0,0,0) için 0 tane,
(1,1,1) için 1 tane,
(1,2,0) için $\binom{3}{1}\binom{3}{1}\binom{2}{1}=18$ tane,
(2,2,2) için 1 tane olacaktır. Buna göre toplamda 0+1+18+1=20 tane altküme vardır.
Doğru cevap “B” seçeneğidir.

6. $s(ABC) = 90^o$ olan bir ABCD dışbükey dörtgeninde [AC] köşesinin orta noktası E dir. $|AE| = |DE|$ ve $s(ABD) = 20^o$ ise, $s(AED)$ nedir?

a) 40 b) 30 c) 20 d) 15 e) 10



Çözüm. BED üçgeni için $|BE| = |ED|$ **olacağına göre,**

$$(70-a)+(70-a)+2a+m(AED)=180^o$$

olacaktır. Buradan da $m(AED) = 40^o$ olarak bulunur.

Doğru cevap "A" seçeneğidir.

7. $1^4+2^4+3^4+\cdots+2011^4$ sayısının 16 ile bölümünden kalan nedir?

a) 14 b) 11 c) 8 d) 5 e) 2

Çözüm. $x\in\mathbb{Z}$ olmak üzere x tek sayı ise $x^4\equiv 1\pmod{16}$ ve x çift sayı ise $x^4\equiv 0\pmod{16}$ olacaktır. Buna göre,

$$1^4+2^4+\cdots+2011^4\equiv 1+0+1+\cdots+1\equiv 1006\equiv 14\pmod{16}$$

olacaktır.
Doğru cevap “A” seçeneğidir.

8. Başlangıçta ellerinde 5,10,15,20 ve 25 şeker bulunan beş öğrenciden her adımda biri elinde ki şekerlerin bir kısmını diğer öğrenciler arasında eşit olarak paylaştırıyor. En az kaç adımda öğrencilerin ellerinde ki şekerlerin sayısı eşitlenebilir?

a) 4 b) 5 c) 6 d) 7 e) 8

Çözüm. Öğrencilerin ellerinde toplamda 75 şeker olduğuna göre her birinin sonuçta elinde 15 tane şeker olacaktır. Öyleyse her bir öğrenciyi 15 yapmaya çalışalım.

5	10	15	20	**25**
9	14	19	**24**	9
12	17	**22**	12	12
14	**19**	14	14	14
15	15	15	15	15

Buna göre 4 adımda şeker sayıları eşitlenecektir.

Doğru cevap "A" seçeneğidir.

9. $|AB| = 16$ ve $|BC| = 24$ olan bir ABC üçgeninin B köşesine ait iç açıortayının üstündeki bir D noktası $s\left(BDC\right) = 90^o$ koşulunu sağlıyor. $[AC]$nin orta noktası E ise, $|DE|$ nedir?

a) 10 b) 9 c) 8 d) 4 e) 2

Çözüm. Soruda verilen bilgiler ışığında şekli çizersek, $ABC \cong DFE$ olacağından

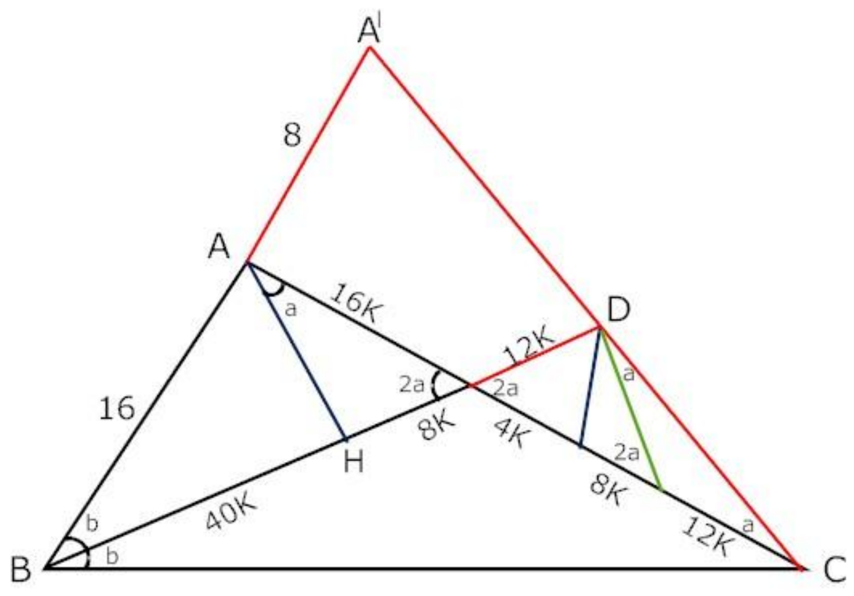
$$\frac{|FE|}{|AF|} = \frac{|FD|}{|FB|} = \frac{|DE|}{|AB|}$$

Eşitliğini kullanırsak

$$\frac{4k}{16k} = \frac{12k}{48k} = \frac{|DE|}{16}$$

İse $|DE| = 4$ olarak bulunur.

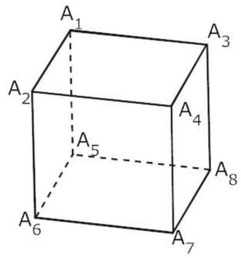
Doğru cevap "D" seçeneğidir.



10. Bir Küpün köşelerine tamsayılar; en çok kaç köşedeki sayı, bu köşeye bir ayrıtla bağlayan üç köşedeki sayıların aritmetik ortalamasından küçük olacak biçimde yerleştirilebilir?

a) 8 b) 7 c) 6 d) 5 e) 4

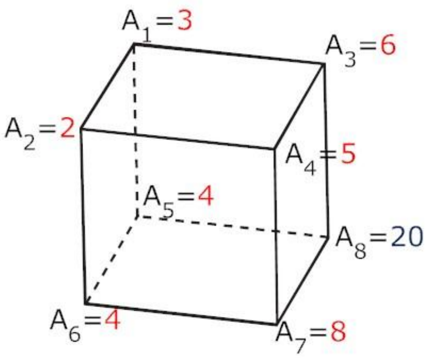
Çözüm. Varsayalım şeklimiz aşağıdaki gibi bir küp olsun,



buna göre,

$$\left.\begin{aligned} 3A_1 &< A_2 + A_3 + A_5 \\ 3A_2 &< A_1 + A_4 + A_6 \\ 3A_3 &< A_1 + A_4 + A_8 \\ 3A_4 &< A_2 + A_3 + A_7 \\ 3A_5 &< A_1 + A_6 + A_8 \\ 3A_6 &< A_2 + A_5 + A_7 \\ 3A_7 &< A_4 + A_6 + A_8 \\ 3A_8 &< A_3 + A_5 + A_7 \end{aligned}\right\} 3S < 3A_1 + 3A_2 + 3A_3 + 3A_4 + 3A_5 + 3A_6 + 3A_7 + 3A_8$$

olacaktır. Ancak bu durumda $S < S$ eşitsizliği oluşur ve bu eşitsizlik bir çelişkidir. Demek ki 8 köşe olamaz. Eğer 7 köşe için kontrol edersek aşağıda ki şekilde de görüldüğü üzere sağlandığı görülecektir.



11. Ayşe bir kavanozdan her adımda kavanozdaki bilye sayısının bir fazlasının yarısı sayıda bilyeyi çıkarıyor. Kavanozu boşaltmak için Ayşe'nin bu işlemi beş kez tekrarlaması gerekiyorsa, başlangıçta kavanozda kaç bilye vardır?

a)15　　b) 16　　c) 31　　d) 33　　e) 37

Çözüm. Eğer kavanozdan, içerideki bilye sayısının bir fazlasının yarısı çıkarılıyor ise kavanozdaki bilye sayısının çift olamayacağı açıktır. Yani B seçeneği doğru değildir.
Benzer biçimde 15 bilyede ise istenilen işlem sayısına ulaşılamayacağı aşikârdır. Eğer elimizde 33 bilye olsaydı, ikinci basamakta bilye sayısı çift sayı olacağından işlem devam etmeyecektir. Öyleyse sadece 31 ve 37 bilye olabilir. Eğer 31 bilye olsaydı,

$$31 \to 15 \to 7 \to 3 \to 1 \to 0$$

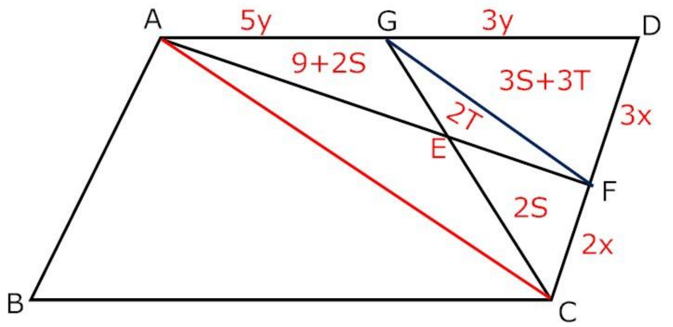
Olacağından toplam basamakta kavanoz boşalacaktır.

Doğru cevap "C" seçeneğidir.

12. E, ABCD paralelkenarının iç bölgesinde bir nokta olmak üzere; AE doğrusu [DC] kenarını F noktasında, CE doğrusu da [AD] kenarını G noktasında kesiyor. |DC|/|FC|=3/2, |DG|/|GA|=3/5 ve Alan(AEG)-A(CEF)=9 ise, Alan(ABCD) nedir?

a)95 b) 90 c) 85 d) 80 e) Hiçbiri

Çözüm. Önce soruda verilen şekli çizelim,



buna göre,

$$\frac{9+2S+2T}{3S+3T}=\frac{5}{3}$$

olacağından S+T= 3 olarak bulunacaktır. Buna göre,

$$A(CGD)=5S+5T=15$$
$$A(ACG)=25$$

olarak bulunacaktır.

$$2\left[A(CGD)+A(ACG)\right]=A(ABCD)$$

olduğuna göre

$$2\cdot 40=80=A(ABCD)$$

olarak bulunur.

Doğru cevap "D" seçeneğidir.

13. İstasyon saatinin her saat başı çaldığı bir istasyondan eşit zaman aralıklarıyla tren geçiyor. Cumartesi günü bir süre boyunca istasyonu seyreden Ali, bu süre boyunca iki trenin geçtiğini görüyor ve bir kez de saatin çaldığını duyuyor. Pazar günü ise, Ali daha uzun bir süre boyunca istasyonu seyrediyor. Ali bu süre boyunca 16 kez saatin çaldığını duyduğuna göre, gördüğü tren sayısı en az kaç olabilir?

a)16　　b) 10　　c) 9　　d) 7　　e) Hiçbiri

Çözüm. Ali Cumartesi istasyona gittiğinde saatin bir kez çaldığını duyduğuna göre geçirebileceği maksimum süre 1 saat 59 dakikadır. Ve bu süre içerisinde treni 2 defa gördüğüne göre tren en uzun süre aralığı olarak 1 saat 58 dakikada 1 defa geçer.
Ali Pazar istasyona gittiğinde ise saati 16 kez duyuyor ise geçirdiği en az süre 14 saat 1 dakikadır. Eğer tren 1 saat 58 dakikada bir geçiyorsa 14 saat 1 dakikada 7 defa geçer.
Doğru cevap "D" seçeneğidir.

14. Aşağıdaki hangi (A,B) ikilisi için $2x+y=A$ ve $x^2+y^2=B$ eşitliklerini sağlayan hiçbir (x,y) gerçel sayı ikilisi yoktur?

a) $\left(\frac{5}{2},\frac{9}{7}\right)$ b) $\left(1,\frac{2}{9}\right)$ c) $\left(\frac{4}{3},\frac{1}{3}\right)$ d) $\left(\frac{9}{5},\frac{2}{3}\right)$ e) $\left(2,\frac{6}{7}\right)$

Çözüm. $y=A-2x$ için $x^2+\left(A-2x\right)^2=B$ elde edilecektir. Buna göre eğer son eşitliğimizi düzenlersek

$$5x^2+x\left(-4A\right)+\left(A^2-B\right)=0$$

olacaktır. (x,y) gerçel sayı ikililerinin olmaması için $\Delta<0$ olmalıdır. Buna göre,

$$\Delta=\left(-4A\right)^2-4\cdot 5\cdot\left(A^2-B\right)<0$$

olacaktır. Buna göre,

$$16A^2-20A^2+20B<0\Rightarrow 20B<4A^2\Rightarrow 5B<A^2$$

olacaktır. Ancak $\left(\frac{4}{3},\frac{1}{3}\right)$ ikilisi için

$$5\left(\frac{1}{3}\right)<\left(\frac{4}{3}\right)^2\Rightarrow\frac{15}{9}<\frac{16}{9}$$

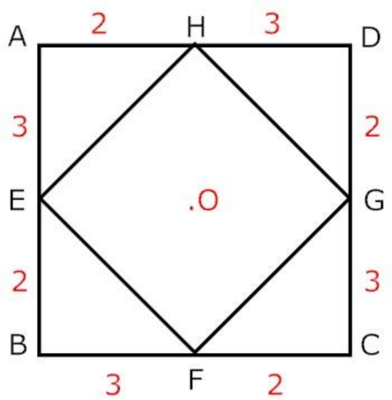
olacağından istenilen ikili $\left(\frac{4}{3},\frac{1}{3}\right)$ olacaktır.

Doğru cevap “C” seçeneğidir.

15. Kenar uzunluğu 5 birim olan ABCD karesinin [AB], [BC], [CD], [DA] kenarları üstünde |AE|=|BF|=|CG|=|DH|=3 olacak biçimde sırasıyla E,F,G,H noktaları alınıyor. A, B, C, D noktalarından geçen çemberin sınırladığı dairenin alanı, EFGH karesine içten teğet olan çemberin sınırladığı dairenin alanına oranı kaçtır?

a) $\frac{13}{5}$ b) $\frac{40}{13}$ c) $\frac{45}{13}$ d) $\frac{13}{4}$ e) *Hiçbiri*

Çözüm. Önce soruda verilen şekli çizelim. Buna göre,



ABCD noktalarından geçen çemberin alanı

$$\pi\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{\pi \cdot 50}{4} = \frac{\pi \cdot 25}{2} cm^2$$

EFGH karesine içten teğet olan çemberin alanı

$$\pi\left(\frac{\sqrt{13}}{2}\right)^2 = \pi\frac{13}{4} cm^2$$

olduğuna göre alanları oranı 50/13 olacaktır. Ancak bu cevap seçeneklerin hiçbirinde yoktur.

Doğru cevap "E" seçeneğidir.

16. Aşağıdaki sayıların en küçüğü hangidir?

a) $\frac{\sqrt{3}}{6}$ b) $\frac{\sqrt{10}}{11}$ c) $\sqrt{5}-2$ d) $\frac{1}{4}$ e) *Hiçbiri*

Çözüm. Sayıları ikili olarak karşılaştıralım ve küçük olanı bir sonraki sayı ile sınayalım. Varsayalım $\frac{\sqrt{3}}{6} > \frac{\sqrt{10}}{11}$ olsun. Buna göre, $11\sqrt{3} > 6\sqrt{10} \Rightarrow \sqrt{363} > \sqrt{360}$ olacaktır. Öyleyse eşitsizlik doğrudur. Şimdi de $\frac{\sqrt{10}}{11} < \frac{1}{4}$ eşitsizliğini kontrol edelim. $4\sqrt{10} < 11 \Rightarrow \sqrt{160} < \sqrt{121}$ olacaktır ki bu eşitsizlik yanlıştır. Öyle ise $\frac{\sqrt{10}}{11} > \frac{1}{4}$ olacaktır. Şimdi de $\frac{1}{4} > \sqrt{5}-2$ eşitsizliğini kontrol edelim. $1 > 4\sqrt{5}-8 \Rightarrow 9 > 4\sqrt{5} \Rightarrow \sqrt{81} > \sqrt{80}$ olacaktır ve doğrudur. Şimdilik $\sqrt{5}-2$ en küçük görünüyor ancak bir mukayesemiz daha var. Varsayalım $\sqrt{5}-2 > 3\sqrt{2}-4$ olsun. Bu durumda iki tarafı da eşlenikleriyle çarpıp bölersek

$$\frac{1}{\sqrt{5}+2} > \frac{1}{\sqrt{4,5}+2}$$

olacaktır ki, bu eşitsizlik yanlıştır. Öyle ise $\sqrt{5}-2 < 3\sqrt{2}-4$ olacaktır. Yani en küçük değer $\sqrt{5}-2$ olacaktır.

Doğru cevap "C" seçeneğidir.

17. 16^{2011} sayısının on tabanına göre yazılımında onlar basamağındaki rakam aşağıdakilerden hangisidir?

a)9 b) 7 c) 5 d) 3 e) 1

Çözüm. Aslında soruda istenilen cevap

$$16^{2011} \equiv x \left(\text{mod} 100 \right)$$

denkliğini sağlayan x değeridir. Eğer kontrol edilirse, onlar basamağının alabileceği değerler sırasıyla 1,5,9,3,7 olacaktır. Buna göre,

$$16^{2011} \equiv 1 \left(\text{mod} 100 \right)$$

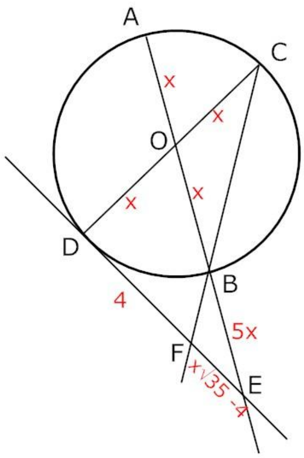
olacaktır.

Doğru cevap “E” seçeneğidir.

18. [AB] ve [CD] bir çemberin farklı çapları olmak üzere, D den bu çembere çizilen AB doğrusunu B ye göre A ile farklı tarafta yer alan bir E noktasında, BC doğrusunu F noktasında kesiyor. |EB|/|AB|=5/2 ve |DF|= 4 ise |EF| nedir?

a)3 b) 4 c) 6 d) 8 e) 10

Çözüm. Önce soruda verilen geometrik şekli çizelim.



Çizilen şekilde |DC| doğrusu çap olduğuna göre, |DC| $\perp$ |DE| olduğu açıktır. Buna göre,

$$\left(|EF|+4\right)^2 = 5x \cdot 7x \Rightarrow |EF| = x\sqrt{35} - 4$$

olacaktır. Bu noktadan sonra yararlanmamız gereken ikinci teorem Menalaus'tur. Buna göre,

$$\frac{x}{2x} \cdot \frac{4}{x\sqrt{35}-4} \cdot \frac{5x}{x} = 1 \Rightarrow x = \frac{2\sqrt{35}}{5}$$

olacaktır. Buradan da

$$|FE| = \frac{2\sqrt{35}}{5} \cdot \sqrt{35} - 4 = \frac{70}{5} - 4 = 14 - 4 = 10$$

olarak bulunacaktır.

Doğru cevap "E" seçeneğidir.

19. $2,3,4,\cdots,2011$ tam sayılarından kaç tanesi karekökünden küçük olan en büyük tamsayı ile bölünür?

a) 44 b) 88 c) 89 d) 130 e) 131

Çözüm. $a \in \mathbb{Z}$ olmak üzere istenen a değerleri

$$\frac{a}{[\![\sqrt{a}]\!]} \in \mathbb{Z}$$

olacaktır. Yani $a = [\![\sqrt{a}]\!] \cdot k, k \in \mathbb{Z}$ olacaktır. Buna göre önce tam kare sayıları referans noktaları olarak alalım ve bu sayıların arasında olup yukarıda belirtilen şartları sağlayan tamsayıları arayalım.

$$\begin{array}{l}
\rightarrow \{2,3,4\} \rightarrow 3 \text{ tane} \\
\left.\begin{array}{l}
\sqrt{4} = 2 \\
\rightarrow \{6,8\} \\
\sqrt{9} = 3 \\
\rightarrow \{12,15\} \\
\sqrt{16} = 4 \\
\rightarrow \{20,24\} \\
\sqrt{25} = 5 \\
\rightarrow \{30,35\} \\
\sqrt{36} = 6 \\
\rightarrow \{42,48\} \\
\sqrt{49} = 7 \\
\rightarrow \{56,63\} \\
\vdots \\
\vdots \\
\sqrt{1936} = 44
\end{array}\right\} 42 \cdot 2 = 84 \text{ tane} \\
\vdots \rightarrow \{1980\} \rightarrow 1 \text{ tane} \\
\sqrt{2011} \approx 44
\end{array}$$

ise toplam 84+3+1=88 tane değer vardır.

Doğru cevap “B” seçeneğidir.

20. r pozitif gerçel sayısı

$$2r - \frac{3}{2r+4} = 4$$

eşitliğini sağlıyorsa,

$$r + \frac{3}{4r+8}$$

nedir?

a) $2\sqrt{5}-2$ b) $\sqrt{6}$ c) $\sqrt{19}-2$ d) $\sqrt{5}$ e) $\sqrt{18}-2$

Çözüm. $2r - \dfrac{3}{2r+4} = 4$ olduğuna göre, bu eşitlikten $r = \sqrt{19}/2$ olarak bulunacaktır. Buna göre,

$$r + \frac{3}{4r+8} = \frac{4r^2+8r+3}{4r+8} = \frac{8r+22}{4r+8} = \frac{4r+11}{2r+4} = \frac{2\sqrt{19}+11}{\sqrt{19}+4}$$

sonucu bulunacaktır. Bu sonucu kısaltırsak

$$\frac{\left(2\sqrt{19}+11\right)\left(\sqrt{19}-4\right)}{3} = \frac{3\sqrt{19}-6}{3} = \sqrt{19}-2$$

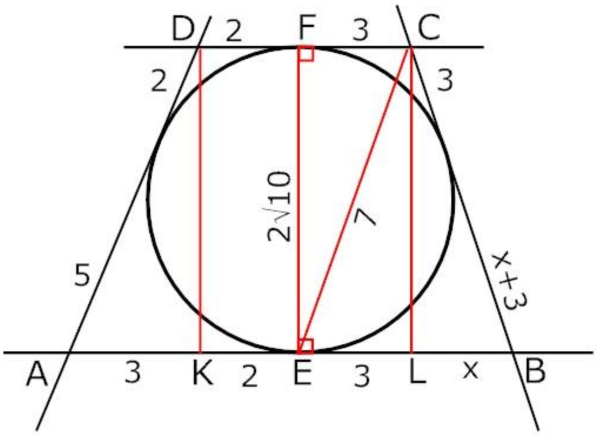
eşitliğini bulmamız zor olmayacaktır.

Doğru cevap “C” seçeneğidir.

21. $AB//CD$ olmak üzere, ABCD yamuğunun tüm kenarlarına teğet olan bir çember [AB] ye E, [CD] ye de F noktasında değiyor. |AE|= 5, |CF|= 3, |FD|= 2 ise, |BE| nedir?

a) $\frac{15}{2}$ b) 4 c) $\frac{10}{3}$ d) 3 e) *Hiçbiri*

Çözüm. Öncelikle soruda verilen şekli çizelim.



$|DK| = |FE| = |CL| = 2\sqrt{10}$ olduğuna göre $|CE| = 7$ olarak bulunacaktır. Buna göre,

$$\left(2\sqrt{10}\right)^2 + x^2 = \left(x+6\right)^2$$

eşitliğinden $x = 1/3$ olarak bulunacaktır. Buna göre,

$$|BE| = x + 3 = \frac{1}{3} + 3 = \frac{10}{3}$$

olarak bulunacaktır.

Doğru cevap "C" seçeneğidir.

22. $pqr = 2pr + qr + 10pr$ eşitliğini sağlayan kaç (p,q,r) asal sayılar üçlüsü vardır?

a) 5 b) 4 c) 3 d) 2 e) 1

Çözüm. $pqr = 2pr + qr + 10pr$ eşitliğini düzenlersek $r(pq - 2p - q) = 5 \cdot 2 \cdot p$ eşitliğini elde ederiz. Çözümün sonraki kısımlarını basamaklar halinde çözelim.

Durumbir. $r = 5$ ise $pq - 2p - q = 2p$ olacağından $pq - q = 4p$ olacaktır. Burada $p = q$ ise $p - 1 = 4$ olacağından $(p,q,r) = (5,5,5)$ olacaktır.

Durumiki. $r = 2$ ise $pq - q = 14p$ olacaktır. Buradan $q(p-1) = 14p$ ise $q = p$ ve $p - 1 = 14$ olacağından $p = 15$ bulunacaktır. Ancak bu durumda p asal değildir.

Durumüç. $r = p$ ise $pq - 2p - q = 10$ olacaktır. Bu eşitlikte p değişkenini çekersek,

$$p = 1 + \frac{12}{q-2}$$

eşitliğinden $q = 3$ için $p = 13$ olacaktır. Buna göre, $(p,q,r) = (13,3,13)$ olacaktır.

Doğru cevap "D" seçeneğidir.

23. 4 siyah, 4 beyaz ve 4 kırmızı top, iki kırmızı top yan yana gelmemek koşuluyla kaç farklı biçimde sıralanabilir?

a) 8084 b) 8284 c) 8642 d) 8742 e) 8820

Çözüm. Siyah ve Beyaz topların yerleşmesi,

$$\frac{8!}{4!\cdot 4!}=70$$

olacaktır.Kırmızı topların dizilen topların arasına yerleşmesi,

$$\frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{4!}=126$$

olacaktır. Buradan,

$$126\times 70=8820$$

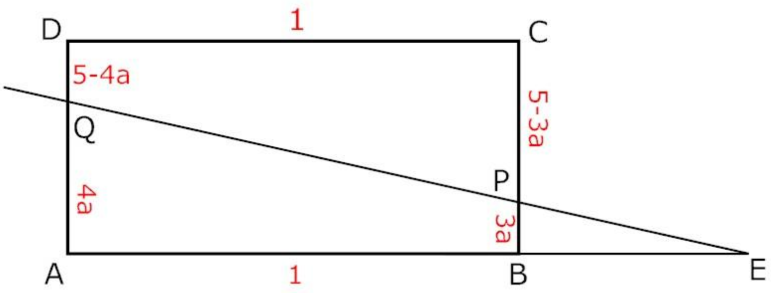
olacaktır.

Doğru cevap "E" seçeneğidir.

24. AB doğrusu üstünde ve B noktasına göre A ile farklı tarafta yer alan E noktasından geçen bir doğru ABCD dikdörtgeninin [BC] kenarını P, [AD] kenarını da Q noktasında kesiyor. |AB|= 1, |BE|= 3, |AD|= 5 ve PCDQ yamuğunun alanı PQAB yamuğunun alanının iki katı ise , |BP| nedir?

a) 7/5 b) 4/3 c) 5/3 d) 10/7 e) Hiçbiri

Çözüm. Soruda verilen şekli çizelim.



Buna göre,

$$A(PCDQ)=2\cdot A(PQAB),|BP|=1$$

olacaktır. Buradan,

$$(5-3a)+(5-4a)\cdot\frac{1}{2}=\cancel{2}\cdot\frac{7a}{\cancel{2}}$$

eşitliğinden

$$a=\frac{10}{21}$$

olarak bulunur. Buna göre

$$|PB|=3a=\frac{10}{\cancel{21}}\cdot\cancel{3}=\frac{10}{7}$$

olarak bulunur.

Doğru cevap "D" seçeneğidir.

25. Kaç n tam sayısı için $\left|n^3-6n^2+5\right|$ sayısı asaldır?

a) 4 b) 3 c) 2 d) 1 e) 0

Çözüm. Eğer verilen ifadeyi çarpanlarına ayırırsak, p asal sayı olmak üzere,

$$\left|(n-1)\left(n^2-5n-5\right)\right| = p$$

olacaktır. Buna göre,

$(n-1)$	$\left(n^2-5n-5\right)$	
1	p	n=2, $\boxed{p=11}$
p	1	$n^2-5n=6, n=p+1$ $\boxed{n=6}$, $\boxed{p=5}$
-1	p	$\boxed{n=0}$, $\boxed{p=5}$
1	-p	n=2, p=11
p	-1	n-1=p, $n^2-5n=4, n\notin\mathbb{Z}$
-p	1	n-1=-p, $n^2-5n=6, n=6, n=-1$ ise n=-1 için $\boxed{p=2}$

olacaktır. Buna göre, $n=\{2,6,0,-1\}$ için bir asal sayı elde edilir.

Doğru cevap "A" seçeneğidir.

26. $m \le k$ olmak üzere, 100×100 bir satranç tahtasının m birim karesine mavi, k birim karesine de kırmızı birer taş, hiçbir satır ya da sütunda farklı renkte iki taş yer almayacak biçimde yerleştirilmişse, m en çok kaç olabilir?

a) 5000 b) 3500 c) 2500 d) 1000 e) Hiçbiri

Çözüm. Varsayalım 4×4'lük karemiz var olsun. Buna göre,

m		**m**	
	k		**k**
m		**m**	
	k		**k**

$m \le k$ olduğuna göre, m sayısı en fazla k sayısına eşit yada satranç tahtasındaki kare sayısının dörtte birine eşit olacaktır. Öyleyse,

$$\frac{100 \cdot 100}{4} = 2500$$

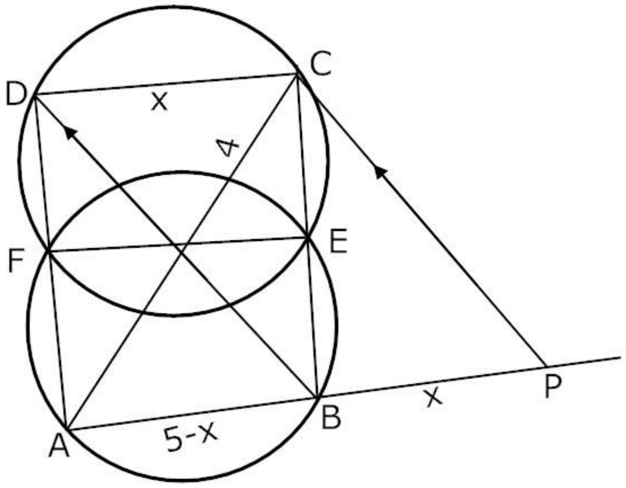
tane m değeri alınabilecek en büyük değer olacaktır.

Doğru cevap "C" seçeneğidir.

27. E ve F, ABCD dışbükey dörtgeninin sırasıyla, [BC] ve [AD] kenarları üstünde yer alan köşelerden farklı noktalar olmak üzere; hem A, B, E, F noktaları, hem de C,D, F, E noktaları çemberdeştir[1]. |AC|= 4, |AB|+|CD|= 5 ve s(BAC)= 60° ise |BD| nedir?

a) $\sqrt{21}$ b) $\sqrt{20}$ c) $\sqrt{18}$ d) 4 e) *Hiçbiri*

Çözüm. Önce soruda verilen geometrik şekli çizmeye çalışalım.



Şekilden de görülebileceği üzere DBPC paralelkenar olacaktır. Buna göre, $|BD| = |PC|$ eşitliği görülecektir. Buna göre, eğer APC üçgeninde kosinüs teoremini kullanırsak,

$$|BD|^2 = |PC|^2 = 4^2 + 5^2 - 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \cos 60^o$$
$$|BD|^2 = |PC|^2 = 21$$
$$|BD| = |PC| = \sqrt{21}$$

olarak bulunacaktır.

Doğru cevap "A" seçeneğidir.

[1] Çemberdeş; aynı çember üzerinde olan noktalar kümesi.

28. Başlangıçta tahtada bir n tamsayısı yazılıdır. iki oyuncu sırasıyla hamle yaparak; her hamlede tahtadaki sayıyı silip yerine o sayıdan büyük olan, ama o sayının iki katını aşmayan bir tam sayı yazılıyorlar. Tahtaya, 2011 sayısını yazan oyuncu oyunu kazanıyor. Oyun, $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16$ değerlerinin her biri için birer kez oynanırsa, bu oyunlardan kaçını oyuna başlayan oyuncu kazanmayı garantileyebilir?

a) 13 b) 7 c) 3 d) 1 e) Hiçbiri

Çözüm. Bu çalışma kağıdında soruların tamamının çözümleri verilmemiştir. Bu sorunun çözümü öğrenciye bırakılmıştır.

İpucu: 2011 sayısı 1024<2011<2048 yani $2^{10} < 2011 < 2^{11}$ aralığındadır. Strateji olarak 2 sayısının kuvvetlerini seçen oyuncunun kazanmaya yakın olduğunu anlamak zor değildir.

29. x, y, z, t gerçel sayılar olmak üzere

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 - xy - yz - zt - 10t$$

ifadesinin alabileceği en küçük değer nedir?

a) -34 b) -37 c) -40 d) -42 e) Hiçbiri

Çözüm. Soruda verilen ifadeyi düzenlersek

$$t^2 - tz - 10t + x^2 - xy + y^2 - yz + z^2 = S$$

eşitliğini elde ederiz. Şimdi S ifadesine değişkenlerimi kullanarak tam kareler toplamları ile yaklaşmaya çalışalım. Eğer ifadeyi biraz daha düzenlersek,

$$\Rightarrow \left(t - \frac{z}{2} - 5\right)^2 = t^2 - tz - 10t + \frac{z^2}{4} + 5z + 25$$

$$\Rightarrow \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 = x^2 + \frac{y^2}{4} - xy$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4}\left(y - \frac{2z}{3}\right)^2 = \frac{3y^2}{4} - yz + \frac{z^2}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{5}{12}(z-6)^2 = \frac{5z^2}{12} - 5z + 15$$

eşitliklerini elde ederiz. Eğer bu eşitlikleri toplarsak

$$\left(t - \frac{z}{2} - 5\right)^2 + \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\left(y - \frac{2z}{3}\right)^2 + \frac{5}{12}(z-6)^2 = S + 40$$

eşitliğinin sol tarafı negatif olamayacağından en az sıfır olabilir. Buna göre,

$$S + 40 = 0$$
$$S = -40$$

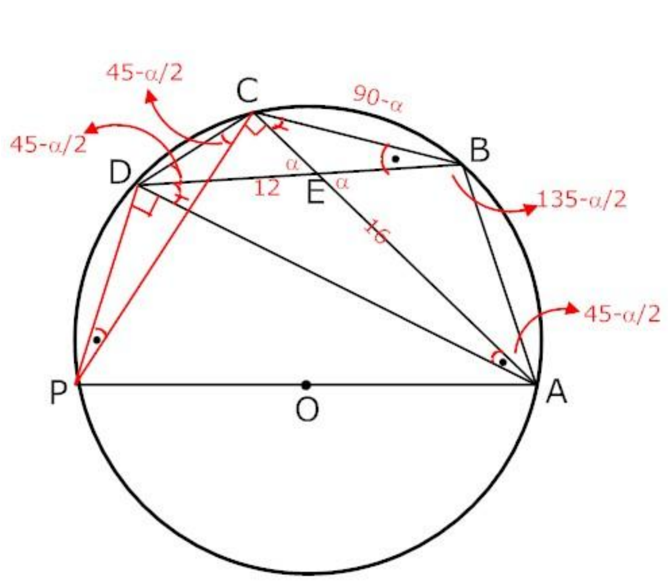
olacaktır.

Doğru cevap “C” seçeneğidir.

30. Köşeleri çember üzerinde olan ABCD dışbükey dörtgeninin köşegenleri E noktasında kesişiyor. |AC|= 16, |BD|= 12 ve CED açısının ölçüsü ile BC yayının ölçüsünün toplamı 90^{o} ise, çemberin yarıçapı nedir?

a) 14 b) 12 c) 11 d) 10 e) 9

Çözüm. Önce soruda verilen şekli çizelim.



Şekilde de görüldüğü üzere CDB ile DPC üçgenleri eş üçgenlerdir. Dolayısı ile |PC|=|DP|= 12 olacaktır. CPA' de

$$|PA|^2 = |PC|^2 + |CA|^2$$

ise $|PA| = 20$ ve

$$|PO| = |OA| = r = 10$$

olarak bulunur.

Doğru cevap "D" seçeneğidir.