XIV. Ulusal İlköğretim Matematik Olimpiyatı 2010 Sorular ve Çözümleri

©www.sbelian.wordpress.com
sbelianwordpress@gmail.com

Tübitak BAYG tarafından her yıl ilköğretim 6, 7 ve 8. sınıf öğrencilerinin katılımı ile yapılan sınavlardan XV. Ulusal İlköğretim Matematik Olimpiyatları-2010 sınavının soruları ve çözümleri ilerleyen sayfalarda verilmiştir. Sınavda toplam 30 soru vardır. Çözümlerde tüm basamaklar ayrıntılı olarak yazılmıştır. Çözümlerin yapılmasında ve **LaTeX 2ε** ile yazılmasında emeği geçenlere teşekkür ederiz. Soruların ve çözümlerin yayın hakkı sadece TÜBİTAK'a ve yayın hakkı almış yayınevlerine aittir. Sizde tüm çözümlere ulaşmak isterseniz web[1] üzerinden, tüm yılların ayrıntılı çözümlerinin verildiği kitaplara ulaşabilirsiniz.

Kolay gelsin.

Sbelian $\boxed{\Sigma}$

[1]Altın Nokta Yayınları, www.nokta2000.com

Soru 1. Kendisi ile 1 fazlasının toplamı 3 ün bir kuvvetine eşit olan kaç pozitif tamsayı vardır?

(a)3 (b)2 (c)1 (d)0 (e)Hiçbiri

Çözüm 1. $x \in \mathbb{Z}^+$ ise $(x)+(x+1) = 3^a$, $a \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ olcağı açıktır. Buna göre, $x = 1$ için $1 + 2 = 3^a$ eşitliğinde $a = 0$ olduğunu görmek zor değildir. Buna göre, $2x + 1 = 3^a$ eşitliğinin her iki tarafına $(\mod 3)$ altında bakarsak $2x + 1 \equiv 0\,(\mathrm{mod}3)$ olacağından,

$$4x + 2 \equiv 0\,(\mathrm{mod}3) \Rightarrow x \equiv -2\,(\mathrm{mod}3) \Rightarrow x \equiv 1\,(\mathrm{mod}3)$$

olmalıdır. Eğer kontrol edersek, x değişkeninin alabileceği değerler $x = 1, 4, 13, 40, \cdots$ değerleri gibi en az 4 değer olabilir. Buna göre doğru cevap *(E)* şıkkıdır.

Soru 2. 2010 dan küçük kaç n pozitif tamsayısı için, n nin rakamları toplamıyla aynı rakam toplamına sahip olan her m pozitif tamsayı $m \geq n$ koşulunu sağlar?

(a)33 (b)31 (c)28 (d)27 (e)Hiçbiri

Çözüm 2. $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ sayılarının soruda veriln özellikleri sağladığı açıktır. Buna göre seçeceğimiz iki basamaklı sayılarında rakamları toplamı kesinlikle 9 dan büyük olmalıdır. Buna göre yeni sayılarımız

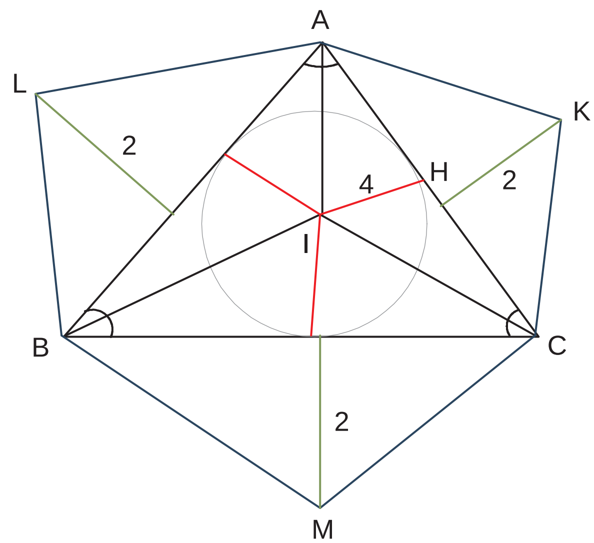
$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 19, 29, 39, 49, 59, 69, 79, 89, 99, 199, 299, 399, 499, 599, 699, 799, 899, 999$$

olmak üzere 28 sayı olacaktır. Buna göre doğru cevap *(C)* şıkkıdır.

Soru 3. Bir ABC üçgeninin iç açıortaylarının kesim noktasının $[AC]$ kenarına uzaklığı 4 birimdir. ABC üçgeninin dışına doğru $[AB]$, $[BC]$, $[CA]$ kenarlarını taban olarak alan ve yükseklikleri 2 birim olan ikizkenar üçgenlerin alanlarının toplamının ABC üçgeninin alanına oranı nedir?

(a)$\frac{1}{5}$ (b)$\frac{1}{4}$ (c)$\frac{1}{3}$ (d)$\frac{1}{2}$ (e)1

Çözüm 3. Çözümü yapabilmek için öncelikle şekli çizmemiz gerekmektedir. Buna göre, Eğer ikizkenar üçgenlerin alanları toplamını bulursak,



$$A(ACB) + A(BMC) + A(KAC) = \frac{2|BA|}{2} + \frac{2|BC|}{2} + \frac{2|AC|}{2} = |AB| + |BC| + |AC|$$

olacaktır. Eğer üçgenin alanını bulursak,

$$A(ABC) = A(AIB) + A(BIC) + A(AIC) = 2(|AB| + |BC| + |AC|)$$

olacağından soruda istenilen oran,

$$\frac{|AB| + |BC| + |AC|}{2(|AB| + |BC| + |AC|)} = \frac{1}{2} \text{ olacaktır.}$$

Buna göre doğru cevap *(D)* şıkkıdır.

Soru 4. 1 saatte en fazla 3 km yol yüzebilen bir balık 15 km lik bir mesafeyi t satte yüzdüyse $4, \frac{17}{4}, \frac{9}{2}, \frac{23}{5}, \frac{19}{4}, 5$ değerlerinden kaçı t tarafından alınabilir?

(a)1 (b)2 (c)3 (d)4 (e)5

Çözüm 4. Açıklama. Öncelikle söylemek gerekir ki, soruda anlatılmak istenen asıl fikir sorunun içindeki kelimelerin arasında saklı. Muhtemelen çözmeye başlayan hemen hemen tüm öğrencilerin aklına gelen ilk ve tek cevap sonucun sadece 5 olduğu çünkü balığın maksimum hızla bile 5 saatten önce bu mesafeyi tamamlayamayacağı yönünde olacaktır. Ancak durum pekte öyle değildir. Aslında balığımız 3 km lik mesafeyi 1 saatten daha kısa zamandada alabilir ama soruda "1 saatte en fazla..." ibaresi kullanıldığından saatteki maksimum hızının 3 km/saat olduğu gibi bir yanılgıya düşülmektedir. Eğer soruda "1 saat içinde en fazla..." denilmiş olsaydı sanıyoruz çözüme gitmek çok daha basit olacaktı. Ama öyle ya nihayetinde bu bir olimpiyat sınavı, olur öyle şeyler...

Eğer balığımız 1 saat içinde en fazla 3 km yol alabiliyorsa, ne yaparsa yapsın ikinci 3 km lik yolu almak için 2. bir saatlik sürenin başlamasını beklemesi gerekecektir. İlk 4 saat sonunda balığımız 12 km yol almış ancak geriye hala 3 km lik gideceği yol kalmıştır. Yani son 3 km lik yolu 5. bir saatlik süre içerisinde istediği zaman alabilir. isterse bu mesafeyi 1 dakikada alır istersede süreyi tam doldurarak 1 saatte. Buna göre şu açıktırki balığımız ne yaparsa yapsın 4 saatten evvel bitiremez, ve dolayısıyla da 4 ten büyük tüm değerleri t zamanı olarak alıp rahatlıkla bitirebilir. Öyleyse 4 dışındaki 5 farklı zaman aralığı için t değeri atanabilir. Buna göre soruda istenilen cevap **(E)** şıkkıdır.

Soru 5. n tamsayı olmak üzere, $\frac{n}{21}$ sayısı $\frac{5}{14}$ ile $\frac{5}{12}$ arasında ise n değerini bulunuz.

(a)9 (b)8 (c)7 (d)6 (e)5

Çözüm 5. Basit bir kesirlerde sıralama sorusudur. Buna göre,

$$\frac{5}{14} < \frac{n}{21} < \frac{5}{12} \Rightarrow \frac{5}{7 \cdot 2} < \frac{n}{7 \cdot 3} < \frac{5}{6 \cdot 2}$$

olacaktır. Buradan,

$$90 < 12 \cdot n < 105$$

olacağından n değerinin 8 olduğunu görmek zor değildir. Buna göre doğru cevap *(B)* şıkkıdır.

Soru 6. Çevreleri 35 ve 36 birim olan iki çemberin yarıçapları arasındaki fark kaç birimdir?

(a)$\frac{1}{2\pi}$ (b)$\frac{1}{6}$ (c)$\frac{1}{\pi}$ (d)$\frac{1}{3}$ (e)1

Çözüm 6. r_1 ve r_2 yarıçaplarımız olsun. Buna göre, $Ç_1 = 2\pi r_1$ ve $Ç_2 = 2\pi r_2$ olacaktır. Buradan,

$$2\pi r_2 - 2\pi r_1 = 36 - 35 = 1$$

olduğuna göre,

$$2\pi\left(r_2 - r_1\right) = 1$$

olacaktır. Buradan da, istenilen fark

$$r_2 - r_1 = \frac{1}{2\pi}$$

olarak bulunur. Buna göre doğru cevap *(A)* şıkkıdır.

Soru 7. $10 \leq a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_n \leq 99$ tamsayılarından herhangi ikisi aralarında asal olduklarına göre, n en fazla kaç olabilir?

(a)21 (b)22 (c)23 (d)24 (e)25

Çözüm 7. Eğer $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ değerlerinin hepsini asal sayılar olarak belirlemeye çalşırsak bu sayılarımız

$$11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97$$

olacaktır. Burada toplam 21 tane asal sayı belirledik ve bu sayı grubumuz soruda istenen şartlara uyuyor. Peki, bu sayılarımızı artırabilirmiyiz? Şimdi bunu araştıralım. Eğer bu sayı grubumuza aralarında asal olma durumunu bozmayacak şekilde $2, 3, 5, 7, 9$ sayılarının kuvvetlerini eklersek yani

$$16, 27, 25, 49$$

sayılarını eklersek toplamda $21 + 4 = 25$ tane soruda istenilen şartları sağlayan sayı bulabiliriz. Buna göre doğru cevap *(E)* şıkkıdır.

Soru 8. On tabanına göre yazılımındaki rakamların karelerinin toplamı asal sayı olan kaç tane iki basamaklı asal sayı vardır?

(a)6 (b)5 (c)4 (d)3 (e)2

Çözüm 8. Soru7 de 0 ile 99 arasındaki asal sayıları zaten belirlemiştik. Buna göre,

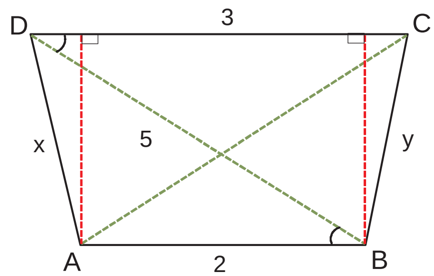
$$11 \Rightarrow 1^2 + 1^2 = 2$$
$$23 \Rightarrow 2^2 + 3^2 = 13$$
$$41 \Rightarrow 4^2 + 1^2 = 17$$
$$61 \Rightarrow 6^2 + 1^2 = 37$$
$$83 \Rightarrow 8^2 + 3^2 = 73$$

olacağından toplam 5 tane bu şekilde asal sayı vardır. Buna göre doğru cevap *(B)* şıkkıdır.

Soru 9. $AB//CD$ olan bir $ABCD$ yamuğunda, $|AB| = 2$, $|CD| = 3$, $|BD| = 5$ ve $s\,(ABD) = 60°$ ise $|AC|$ kaçtır?

(a)3 (b)4 (c)5 (d)6 (e)7

Çözüm 9. $AB//CD$ olduğuna göre, $s(CDB) = s(DBA)$ olacaktır. Eğer, BDC ve



BDA üçgenlerinde kosinüs teoremini uygularsak,

$$x^2 = 5^2 + 2^2 - 2 \cdot 5 \cdot 2 \cos 60 \Rightarrow x^2 = 19$$

ve

$$y^2 = 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cos 60 \Rightarrow y^2 = 19$$

olarak bulunacaktır. Buradan,

$$5^2 + |AC|^2 = x^2 + y^2 + 2 \cdot 2 \cdot 3$$

eşitliğinde x ve y değişkenlerini yerlerine koyarsak,

$$|AC|^2 = 41 - 25 = 16 \Rightarrow |AC| = 4$$

olarak bulunur. Buna göre doğru cevap *(B)* şıkkıdır.

Soru 10. Ayşe 165 sayfalık bir kitabı bazı günler 3 sayfa, bazı günler 6 sayfa ve bazı günler 30 sayfa okuyarak 9 günde bitiriyor. Ayşe kaç gün 30 ar sayfa okumuştur.

(a)1 (b)2 (c)3 (d)4 (e)5

Çözüm 10. Ayşenin değişik sayılarda kitap okuduğu günleri x, y ve z ile gösterirsek, $3 \cdot x + 6 \cdot y + 30 \cdot z = 165$ ve $x + y + z = 9$ denklemlerini elde ederiz. Eğer ilk denklemi sadeleştirirsek, $x + 2 \cdot y + 10 \cdot z = 55$ olacaktır. Eğer burada $z = 5$ olarak alırsak, y ve z değerleri 2 olacaktır. Buna göre, Ayşe 5 gün boyunca 30 ar sayfa okumuştur.Buna göre doğru cevap *(E)* şıkkıdır.

Soru 11. A, B, C, D, E, F farklı rakamları belirtmek üzere, ilk beş teriminin on tabanına göre yazılımları sırasıyla A, BC, BD, CE, FF olan bir aritmetik dizinin altıncı terimi nedir?

(a)51 (b)46 (c)41 (d)38 (e)Hiçbiri

Çözüm 11. Dizi bir Aritmetik dizi olduğuna göre, dizinin ilk üç terimi için $A+BD = 2 \cdot BC$ eşitliği doğru olacaktır. Eğer yazdığımız bu eşitliği düzenlersek $A+D = 10B+2C$ eşitliğini elde ederiz. Bu durumda $B = 1$ olmak zorundadır. Buna göre, $C = 1, 2, 3, 4$ değerlerini alabilir. $B = 1$ ise $C \neq 1$ olacağından $C = 2, 3, 4$ değerlerini alabilir.

$C = 2$ ise $A, 12, 1D, 2E, FF$ dizisi elde edilir. Burada $D = 5$ alınırsa $A = 9$ olacaktır. Yani dizimiz $9, 12, 15, 18$ olurki burada $2E = 18$ durumu hatalı olduğundan, bu dizi yanlıştır. O halde, $A = 8$ ve $D = 6$ olacaktır. Yani dizimiz,$8, 12, 16, 20, 24$ olacaktır ki $24 = FF$ durumu ortaya çıkar bu seferde. Bu durumda yanlıştır. Buna göre, $A = 7$ ve $D = 8$ alırsak $7, 12, 18$ dizisi elde edilecektir, ancak bu dizi bir aritmetik dizi değildir. O halde, $A = 6$ ve $D = 9$ alalım bu durumda dizimiz $6, 12, 19$ üçlüsü ile başlayacaktır. Ancak bu üçlüde bir aritmetik dizinin elemanı değildir.

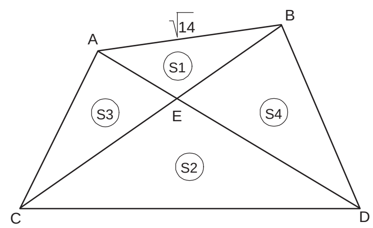
$C = 4$ almamız durumunda $A, 14, 1D, 4E, FF$ dizisi elde edilecektir. Burada $D = A = 9$ durumu oluşacaktırki, bu durum açık çelişkidir.

$C = 3$ alırsak, oluşacak dizi $A, 13, 1D, 3E, FF$ olacaktır. Burada, $D = 7$ ve $A = 9$ olursa dizimiz $9, 13, 17, 21, 25$ olacaktır. Ancak, bu dizide $21 = CE$ ve $25 = FF$ durumları yanlıştır. Buna göre bu dizinin altıncı terimi bulunamaz.Buna göre doğru cevap *(E)* şıkkıdır.

Soru 12. Dışbükey bir ABCD dörtgeninin köşegenlerinin kesişme noktası E olmak üzere, $s(AED) = s(BAD) = 90°$, $|BE| = |EC|$ ve $|AB| = \sqrt{14}$ ise, BDC üçgeninin alanı kaçtır?

(a)5 (b)6 (c)7 (d)10 (e)14

Çözüm 12. $[AC] \perp [DB]$ ve $s(DAB) = 90°$ olmak üzere, $|BE| = |EC|$ olduğuna



göre BEC üçgeni bir ikizkenar dik üçgen olacaktır. Eğer $|EC| = |EB| = a$ ve $|AE| = b$ olarak alırsak euclide bağıntılarından $|DE| = p = \frac{b^2}{a}$ eşitliğini elde ederiz. Dörtgenlerde köşegenlerin ayırdığı alanlar kuralından

$$S_1 \cdot S_2 = S_3 \cdot S_4$$

eşitliği kullanılırsa,

$$\frac{ab}{2} \cdot \frac{b^2}{a} \cdot a \cdot a = b \cdot \frac{b^2}{a} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{2}$$

eşitliğinden $a = 1$ ve $b^2 = 13$ olarak bulunacaktır. Buradan,

$$A(BDC) = (a + \frac{b^2}{a}) \cdot a \cdot \frac{1}{2} = (1 + 13) \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 7$$

olacaktır. Buna göre doğru cevap *(C)* şıkkıdır.

Soru 13. Kaç (a, b) pozitif tam sayı ikilisi için 2^{2010} sayısı $ab(a^2 + b^2)$ sayısı ile bölünür.

(a)1005 (b)1004 (c)504 (d)503 (e)Hiçbiri

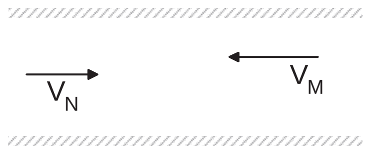
Çözüm 13. $a \cdot b \cdot (a^2 + b^2) | 2^{2010}$ durumunu sağlayan (a, b) ikilileri için $a | 2^{2010}$ ve $b | 2^{2010}$ olmalıdır. Benzer biçimde $(a^2 + b^2)$ toplamıda 2^{2010} sayısını böleceğinden bu toplamıda 2^z biçiminde yazabiliriz. Öyleyse seçilecek tüm (a, b) ikilileride 2 nin aynı kuvveti olmalıdır. Eğer yazmaya çalışırsak,

$$a = 2^0, b = 2^0$$
$$a = 2^1, b = 2^1$$
$$a = 2^2, b = 2^2$$
$$a = 2^3, b = 2^3$$
$$\vdots$$
$$a = 2^{500}, b = 2^{500}$$
$$a = 2^{501}, b = 2^{501}$$
$$a = 2^{502}, b = 2^{502}$$

İkililerini bulmak zor olmayacaktır. Öyleyse soruda istenen durumu sağlayan 503 tane ikili vardır. Buna göre doğru cevap *(D)* şıkkıdır.

Soru 14. Hızı durgun suda 18 km/saat olan motorlu bir tekne ile nehrin akışına ters yönde 40 dakikada gittiğimiz mesafeyi, dönüşte motoru çalıştırmayıp tekneyi akıntıya bırakarak 50 dakikada geliyorsak, akıntının hızı kaç km/saat tir?

(a)9 (b)8 (c)7 (d)6 (e)5



Çözüm 14. Akış yönünün tersi yönde X uzunluğunda bir mesafeyi 40 dakikada $V_M - V_N = 18 - V_N$ hızı ile gidiyoruz. Yani

$$X = \frac{40}{60} \cdot (18 - V_N)$$

olur. Benzer biçimde akıntı yönünde motoru çalıştırmadan,

$$X = \frac{50}{60} = (V_N)$$

olduğuna göre,

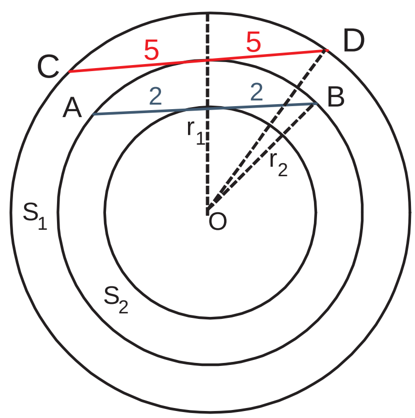
$$\frac{50}{60} V_N = \frac{40}{60}(18 - V_N) \Rightarrow V_N = 8\ km/saat$$

olacaktır.Buna göre doğru cevap *(B)* şıkkıdır.

Soru 15. Merkezleri aynı, yarıçapları farklı olan 3 düzlemdeş çemberden büyüğü ile ortancası arasında kalan S_1, ortancası ile küçüğü arasında kalan alan da S_2 olsun. Ortanca çemberin küçük çembere teğet olan kirişinin 4 birim, büyük çemberin ortanca çembere teğet olan kirişinin uzunluğu da 10 birimdir. $S_1 - S_2$ kaç birim karedir?

(a)21π (b)17π (c)15π (d)13π (e)10π

Çözüm 15.



$$4 + r_1^2 = r_2^2 \Rightarrow r_2^2 - r_1^2 = 4$$

ve

$$25 + r_2^2 = r_3^2 \Rightarrow r_3^2 - r_2^2 = 25$$

deklemlerinin farkını alırsak,

$$\pi\left(\underbrace{r_3^2 - r_2^2}_{S_1}\right) - \pi\left(\underbrace{r_2^2 - r_1^2}_{S_2}\right) = S_1 - S_2 = (25-4)\,\pi = 21\pi$$

Buna göre doğru cevap *(A)* şıkkıdır.

Soru 16. Bir manav aldığı domateslerin $\frac{1}{6}$ sını bozuk çıktığı için çöpe atıp geri kalanları satıyor. Bu durumda %25 kâr ettiğine göre, bozuk domatesleri atmayıp aynı fiyattan satabilseydi, yüzde kaç kâr ederdi?

(a)50 (b)45 (c)40 (d)35 (e)30

Çözüm 16. Varsayalım domateslerin maliyetleri 10 tl olsun. Ve elimizde 6 kg ağırlığında domates bulunsun. Bu 6 kg dan 1 kg ını atarsak ve satış yaparsak %25 kar ediyorsak, $(10 + x) \cdot 5 = 75$ eşitliğinden $x = 5$ lira olur. Yani manav aslında domatesleri 15 liraya satıyordu. Ama bozukları satmasaydı $15 \cdot 6 = 90$ liraya satış yapacaktı. Halbuki toplamda 60 liraya satacaktık. Buradan $90 - 60 = 30$ lira ise 30 lira kar ile yani %50 kar ile satış yapacaktı. Buna göre doğru cevap *(A)* şıkkıdır.

Soru 17. 10 tabanına göre tersten yazılımı ile kendisi aynı olup 3 ile bölünebilen kaç 7 basamaklı pozitif tamsayı vardır?

(a)6300 (b)4200 (c)3600 (d)3000 (e)2700

Çözüm 17. Varsayalım yedi basamaklı tersten yazılışı ile kendisi aynı olan sayımız $\overline{a_1a_2a_3a_4a_3a_2a_1}$ ise $2(a_1 + a_2 + a_3) + a_4 = 3k, \quad k \in \mathbb{N}$ olacaktır. Buna göre, $a_4 \equiv 0, 1 \,(\text{mod}2)$ olacağından $a_4 \in \{0, 1, 2, 3, \cdots, 9\}$ olacaktır. Buna göre çözümün bundan sonrasını basamak, basamak devam ettirelim.

Eğer $a_4 \equiv 0 \,(\text{mod}3)$ ise $a_4 = \{0, 3, 6, 9\}$ olacağından a_4 için 4 farklı değer alabiliriz. $a_4 \equiv 0 \,(\text{mod}3)$ olduğundan $a_1 + a_2 + a_3 \equiv 0 \,(\text{mod}3)$ olmalıdır. Eğer tablodan bakarsak,

a_1	a_2	a_3	
0	0	0	3x4x4=48
1	1	1	3x3x3=27
2	2	2	3x3x3=27
1	2	0	3x3x4=36
1	0	2	3x4x3=36
0	1	2	3x3x3=27
0	2	1	3x3x3=27
2	1	0	3x3x4=36
2	0	1	3x4x3=36

olduğuna göre, toplam üçlü sayısı 300 olacaktır. Ancak, a_4 için toplam 4 değerimiz olduğuna göre, $4 \cdot 300 = 1200$ olacaktır.

Eğer $a_4 \equiv 1 \,(\text{mod}3)$ ise $a_4 \in \{1, 4, 7\}$ olacaktır. Demekki a_4 için toplam 3 farklı değerimiz vardır.$2\,(a_1 + a_2 + a_3) \equiv 2 \,(\text{mod}3)$ ise $a_1 + a_2 + a_3 \equiv 1 \,(\text{mod}3)$ olacaktır. Eğer tablodan bakarsak

a_1	a_2	a_3	
1	0	0	3x4x4=48
0	1	0	3x3x4=36
0	0	1	3x4x3=36
2	1	1	3x3x3=27
1	2	1	3x3x3=27
1	1	2	3x3x3=27
1	2	0	3x3x4=36
2	0	2	3x4x3=36
0	2	2	3x3x3=27

olduğuna göre toplam üçlü sayısı 300 olacaktır. Ancak a_4 için 3 farklı durum olduğundan $300 \cdot 3 = 900$ olacaktır.

Son olarakta, $a_4 \equiv 2 \,(\text{mod}3)$ ise $a_4 \in \{2, 5, 8\}$ olacağından a_4 için 3 farklı değer vardır. Buna göre,

$$2\,(a_1 + a_2 + a_3) + 2 \equiv 0 \,(\text{mod}3) \Rightarrow 2\,(a_1 + a_2 + a_3) \equiv 1 \,(\text{mod}3) \Rightarrow a_1 + a_2 + a_3 \equiv 2 \,(\text{mod}3)$$

olduğuna göre, aşağıdaki tablodan bu denkliğe uyan üçlülerin sayısını bulalım. Buna göre,

a_1	a_2	a_3	
1	1	0	3x3x4=36
0	1	1	3x3x3=27
1	0	1	3x4x3=36
2	0	0	3x4x4=27
0	2	0	3x3x4=27
0	0	2	3x4x3=36
2	2	1	3x3x3=27
1	2	2	3x3x3=27
2	1	2	3x3x3=27

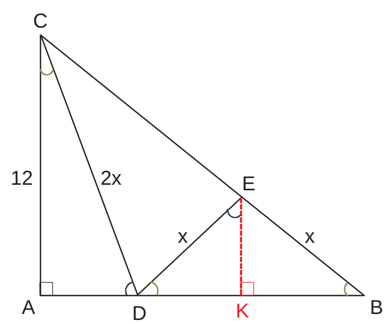
olacağından toplam 300 tane üçlü vardır. Ancak a_4 için 3 farklı değer olduğu için $300 \cdot 3 = 900$ tane üçlü vardır.

Eğer bulduğumuz tüm üçlü sayılarını toplarsak, $1200 + 900 + 900 = 3000$ tane yedi basamaklı tersinden yazılışı aynı olan ve 3 ile kalansız bölünebilen sayı vardır. Buna göre doğru cevap *(D)* şıkkıdır.

Soru 18. $s(BAC) = 90°$ ve $|AC| = 12$ olan bir ABC üçgeninde, D noktası $[AB]$ kenarı, E noktası $[BC]$ kenarı üstünde, $s(EDC) = 90°$ ve $|CD| = 2|DE| = 2|BE|$ ise |DB| kaçtır?

(a)14 (b)12 (c)10 (d)8 (e)6

Çözüm 18. Önce şeklimizi çizip üçgeni görelim, buna göre CAD üçgeni ile BKE



üçgeni arasında bir açı-açı-açı benzerliğinin olduğu açıktır. Eğer benzerlik oranlarını yazarsak,

$$\frac{12}{2x} = \frac{|KB|}{x}$$

olacağından $|KB| = 6$ dolayısıyla da $|DB| = 2|KB| = 12$ olur. Buna göre doğru cevap *(B)* şıkkıdır.

Soru 19. Aşağıdaki (A, B) ikililerinin hangisi için

$$\begin{aligned} x^2 + xy &= A \\ \frac{y}{x} &= B \end{aligned}$$

denkleminin gerçel sayılarda çözümü yoktur.

(a)$(1, -2)$ (b)$(\sqrt{3}, 1)$ (c)$(1, 0)$ (d)$(1/3, -1/2)$ (e)$(-2, -2)$

Çözüm 19. $x^2 + xy = A$ ve $y = xB$ olarak alırsak değişkeni x olan denklemimiz

$$x^2(B + 1) + A - B = 0$$

olacaktır. Eğer buradan x^2 ifadesini çekersek,

$$x^2 = \frac{A - B}{B + 1}$$

eşitliğini elde ederiz. Bundan sonrasında sadece şıkları yerine koymamız yeterli olacaktır. Eğer $(1, -2)$ ikilisini yerine koyarsak

$$x^2 = \frac{1 - (-2)}{-2 + 1} = -3 \;\Rightarrow\; x^2 = -3 < 0$$

durumu ortaya çıkacaktırki, bu durumda x değişkeni gerçel bir sayı olamaz. Buna göre doğru cevap *(A)* şıkkıdır.

Soru 20. 2010 dan küçük kaç pozitif tam sayının on tabanına göre yazılımındaki rakamların toplamı 5 ile bölünür?

(a)390 (b)399 (c)401 (d)405 (e) Hiçbiri

Çözüm 20. $\overline{abcd} < 2010$ olmak üzere, soruda istenilen şartın sağlanması için $a + b + c + d \equiv 0\,(\mathrm{mod}5)$ olacaktır. Herhangi bir doğal sayının 5 ile bölümünden kalanlar sadece $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ kümesinin elemanlarından biri olabilir. a, b, c, d değerleri birer bir basamaklı doğal sayılar olduklarına göre,

$$x \equiv 0\,(\mathrm{mod}5) \Rightarrow x \in \{0, 5\}$$

$$x \equiv 1\,(\mathrm{mod}5) \Rightarrow x \in \{1, 6\}$$

$$x \equiv 2\,(\mathrm{mod}5) \Rightarrow x \in \{2, 7\}$$

$$x \equiv 3\,(\mathrm{mod}5) \Rightarrow x \in \{3, 8\}$$

$$x \equiv 4\,(\mathrm{mod}5) \Rightarrow x \in \{4, 9\}$$

olacaktır. Yani her bir basamaktaki kalan için iki farklı rakam söz konusudur. Şimdi çözümün ilk basamağına geçelim,

$a = 0$ ise $b + c + d \equiv 0\,(\mathrm{mod}5)$ olacaktır. Buna göre b, c, d basamakları için aşağıdaki tablo geçerli olacaktır.

b,c,d	b,c,d	b,c,d	b,c,d	b,c,d	b,c,d
0,2,3	0,4,1	4,3,3	4,4,2	1,1,3	2,2,1
0,3,2	0,1,4	3,4,3	4,2,4	1,3,1	1,2,2
2,0,3	1,0,4	3,3,4	2,4,4	3,1,1	2,1,1
2,3,0	1,4,0				
3,0,2	4,0,1				
3,2,0	4,1,0				
0,0,0					

Her bir kutucuğun içindeki kalan sınıfları için toplam $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ farklı sayı yazılabildiğine ve 25 kutucuk bulunduğuna göre $25 \cdot 8 = 200$ tane $a = 0$ için yazılabilecek sayı vardır.

$a = 1$ ise $b + c + d \equiv -1\,(\mathrm{mod}5)$ olacağından $b + c + d \equiv 4\,(\mathrm{mod}5)$ olacaktır. Buna göre, b, c, d için kalan sınıflarına göre dağılım aşşağıdaki tablodaki gibi olacaktır.

b,c,d	b,c,d	b,c,d	b,c,d	b,c,d	b,c,d
2,2,0	4,0,0	2,1,1	3,1,0	4,4,1	4,3,2
0,2,2	0,4,0	1,2,2	0,1,3	1,4,4	4,2,3
2,0,2	0,0,4	2,1,1	1,3,0	4,1,1	3,4,2
			3,0,1	3,3,3	3,2,4
			0,3,1		2,4,3
			1,0,3		2,3,4

Buna göre, $a = 1$ için her bir kutucukta yazılabilecek 8 sayımız vardır. Yine, toplamda 25 kutucuk olduğuna göre, $25 \cdot 8 = 400$ tane $a = 1$ için yazılabilecek sayı vardır.

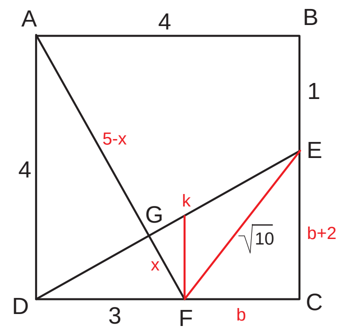
$a = 2$ ise, bu durumda yazabileceğimiz sadece 2 sayımız vardır. Bu sayılarımız 2003 ve 2008 olduğuna göre, toplam 2 tane $a = 2$ için yazılabilecek sayı vardır.

Şimdi elimizdeki verileri birleştirip sonuca ulaşalım, $200 + 200 + 2 = 402$ tane sayı soruda verilen şartları sağlıyor olarak bulunur. Ancak $a = 0$ durumunda $\overline{abcd} = 0000$ sayısı geçersiz olduğundan $402 - 1 = 401$ sayının rakamları toplamı 5 ile bölünebilir. Buna göre doğru cevap *(C)* şıkkıdır.

Soru 21. E ve F noktaları bir $ABCD$ karesinin sırasıyla, $[BC]$ ve $[CD]$ kenarları üstündedir. AF ve DE doğrularının kesişim noktası G olmak üzere, $|FD| = 3$, $|EB| = 1$ ve $|EF| = \sqrt{10}$ ise $|GF|$ kaçtır?

(a)1 (b)$\frac{6}{5}$ (c)$\frac{9}{5}$ (d)2 (e)$\frac{11}{5}$

Çözüm 21. Önce soruda verilen şekili çizelim. Buna göre, ECF üçgeninde pisagor



teoreminden $b^2 + (b+2)^2 = (\sqrt{10})^2$ olacağından $b = 1$ olarak bulunur. DKF ve DEC üçgenleri arasındaki benzerliği kullanırsak

$$\frac{|DF|}{|DC|} = \frac{|FK|}{|CE|} \Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{|FK|}{3} \Rightarrow |FK| = \frac{9}{4}$$

olarak bulunacaktır. Benzer biçimde DAG üçgeni ile KFG üçgenleri arasındaki benzerlikten

$$\frac{|AD|}{|FK|} = \frac{|AG|}{|GF|} \Rightarrow \frac{4}{\frac{9}{4}} = \frac{5-x}{x} \Rightarrow x = \frac{9}{5}$$

olarak bulunacaktır. Buna göre doğru cevap *(C)* şıkkıdır.

Soru 22. 7 günlük bir yaz kampına katılan 100 öğrencinin her birine dolaşması için bir bisiklet veriliyor. Her bisiklet kamp boyunca en çok 6 gün kullanıyorsa, bu kampta en az kaç bisiklet bulunması gerekir?

(a)117 (b)115 (c)112 (d)109 (e) Hiçbiri

Çözüm 22. Kampta toplam 100 öğrenci ve kamp uzunlığuda 7 gün olduğuna göre toplamda 700 günlük bisiklete ihtiyacı vardır. her bir bisiklet en fazla 6 gün kullanılabildiğine göre, $\frac{700}{6} = 116,\overline{6}$ tane bisiklete ihityaç vardır. Ancak bisiklet sayısı tam sayı olmak zorunda olduğuna göre en az 117 tane bisiklete ihtiyaç vardır. Buna göre doğru cevap *(A)* şıkkıdır.

Soru 23. m nin aşağıdaki değerlerinden hangisi $3x^2+4y^2+5z^2 = m$ eşitliğini sağlayan (x, y, z) pozitif tamsayı üçlüsü yoktur.

(a)2007 (b)2008 (c)2009 (d)2010 (e) 2011

Çözüm 23. Dikkat edilirse şıklarda 5 çarpanına sahip oplan tek değer 2010 dur. Değişkenlerden birininde katsayısı 5 olduğuna göre modüler aritmetik yöntemle bu denklemin çözümünün olup olmadığını göstermek yerinde olacaktır. Öyleyse, $m = 2010$ olarak alalım. Buna göre, $3x^2 + 4y^2 + 5z^2 = 2010$ ise $3x^2 + 4y^2 \equiv \pmod 5$ olacaktır. $a \in \mathbb{Z}$ için $a^2 \equiv 0, 1, 4 \pmod 5$ olduğuna göre x^2 ve y^2 değerleri yerine $0, 1, 4$ değerlerini koymamız kontrol için yeterli olacaktır. Buna göre,

$x^2 \equiv 0 \pmod 5$ için

$$\begin{aligned} 3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 &\not\equiv 0 \pmod 5 \\ 3 \cdot 0 + 4 \cdot 1 &\not\equiv 0 \pmod 5 \\ 3 \cdot 0 + 4 \cdot 4 &\not\equiv 0 \pmod 5 \end{aligned}$$

$x^2 \equiv 1 \pmod 5$ için

$$\begin{aligned} 3 \cdot 1 + 4 \cdot 0 &\not\equiv 0 \pmod 5 \\ 3 \cdot 1 + 4 \cdot 1 &\not\equiv 0 \pmod 5 \\ 3 \cdot 1 + 4 \cdot 4 &\not\equiv 0 \pmod 5 \end{aligned}$$

$x^2 \equiv 4 \pmod 5$ için

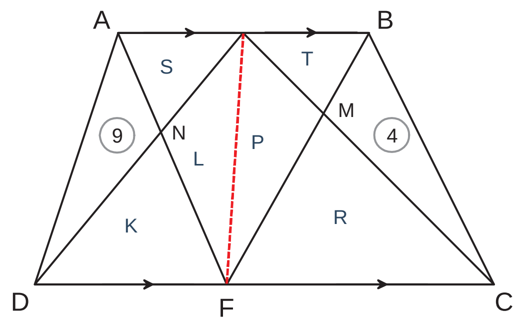
$$\begin{aligned} 3 \cdot 4 + 4 \cdot 0 &\not\equiv 0 \pmod 5 \\ 3 \cdot 4 + 4 \cdot 1 &\not\equiv 0 \pmod 5 \\ 3 \cdot 4 + 4 \cdot 4 &\not\equiv 0 \pmod 5 \end{aligned}$$

ise $m = 2010$ için verilen denklemin kesinlikle çözümü yoktur. Buna göre doğru cevap *(D)* şıkkıdır.

Soru 24. E ve F noktaları bir $ABCD$ yamuğunun sırasıyla, $[AB]$ ve $[CD]$ tabanları üzerinde, EC ve BF doğruları M noktasında, AF ve DE doğruları da N noktasında kesişiyor. CBM üçgeninin alanı 4 birim kare ve DAN üçgeninin alanı 9 birim kare ise, $MFNE$ dörtgeninin alanı kaç birim karedir?

(a)6 (b)$\sqrt{97}$ (c)12 (d)13 (e) Hiçbiri

Çözüm 24. Soruyu çözmeye başlamadan evvel verilen dörtgeni çizmemiz gerekiyor. Buna göre, tabanları ve yükseklikleri aynı olan üçgenlerin dolayısyla alanlarıda aynı



olduğuna göre,

$$A(DAF) = A(DEF) \Rightarrow 9 + K = K + L \Rightarrow L = 9$$

$$A(BFC) = A(ECF) \Rightarrow 4 + R = P + R \Rightarrow P = 4$$

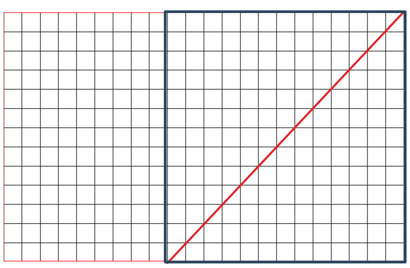
olacaktır. Buna göre, $A(MFEN) = L + P = 9 + 4 = 13$ olarak bulunur. Buna göre doğru cevap *(D)* şıkkıdır.

Soru 25. Başlangıçta $m \times n$ boyutlu bir satranç tahtasının sol alt köşesinde bir taş bulunuyor. Oyuncular sırasıyla hamle yaparak, her hamlede taşı sağa veya yukarı doğru en az bir kare kaydırıyorlar. Hamle yapamayan oyuncu oyunu kaybediyor. Oyun, 13×22, 14×14, 22×24, 15×17 ve 29×29 boyutlu tahtalarda birer kez oynanırsa bu oyunlardan kaçını ilk hamleyi yapan oyuncu kazanmayı garanti edebilir?

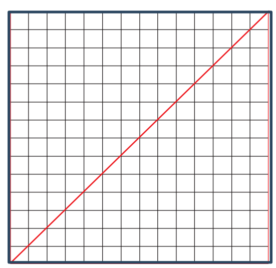
(a)4 (b)3 (c)2 (d)1 (e) Hiçbiri

Çözüm 25. Sorunun çözümünü daha iyi kavrayabilmek için, çözüm içerisinde verilmiş olan tabloları inceleyerek okumaya devam etmek yerinde olacaktır. Buna göre, ilk hamle yapan oyuncunun satranç tahtaları üzerinde belirtilen mavi çerçeveli karelerin köşegenleri üzerinde ki kareler boyunca hareket etmesi gerekmektedir. bu durumda ikinci oyuncu hangi hamleyi yaparsa yapsın birinci oyuncunun son hamlesi kesinlikle $(m-1) \times (n-1)$ numaralı kare üzerinde olacaktır. Böylelikle ikinci oyuncu hangi hamleyi yaparsa yapsın birinci oyuncu, yani ilk hamleyi yapan oyuncu oyunu kazanır. Ancak bu durum her zaman geçerli değildir. Soruda verilen 14×14 ve 29×29 kareleri için ilk hamle yapan oyuncu köşegen üzerinde hareket edemeyecektir çünkü ilk hamlesiyle birlikte köşegen üzerinden ayrılacaktır. Ve köşegen üzerinde taş taşıma hamlesini ikinci oyuncu yapabilir ve oyunu kazanabilir.

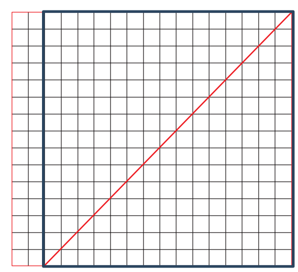
Buna göre, 13×22, 22×24, 15×17 boyutlu tahtalarda ilk oyuncu yukarıda verilen strateji ile kesinlikle oyunu kazanabilir. Yani cevap 3 tahta olacaktır. Buna göre doğru cevap *(B)* şıkkıdır.



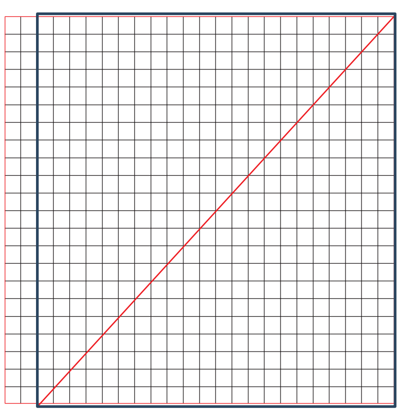
13 x 22



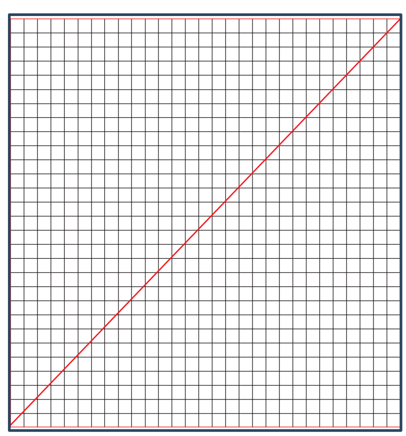
14 x 14



15 x 17



22 x 24



29 x 29

Soru 26. $1 \leq a, b, c \leq 100$ koşulunu ve

$$\begin{aligned} (a+b)\cdot c &= 10 \cdot a^2 \\ c^2 &= a \cdot b \end{aligned}$$

denklem sistemini sağlayan kaç (a, b, c) tamsayı üçlüsü vardır?

(a)100 (b)45 (c)25 (d)20 (e) 10

Çözüm 26. Eğer soruda verilen denklem sistemini düzenlersek $(a+b)\cdot\sqrt{ab} = 10\cdot a^2$ denklemini elde ederiz. Eğer $\sqrt{a} = x$ ve $\sqrt{b} = y$ olarak alırsak yeni denklemimiz

$$y^3 + x^2y + 10x^3 = 0$$

şekline dönüşür. Eğer son denklemimiz çarpanlarına ayırırsak

$$-(2x-y)(5x^2+2xy+y^2) = 0$$

olacaktır. Buradan, denklemimizin çarpanlarından biri $(2x - y)$ olduğuna göre $y = 2x$ eşitliğinden $\sqrt{b} = 2\sqrt{a}$ ve $b = 4a$ olacaktır. Buna göre (a, b) ikililerimiz,

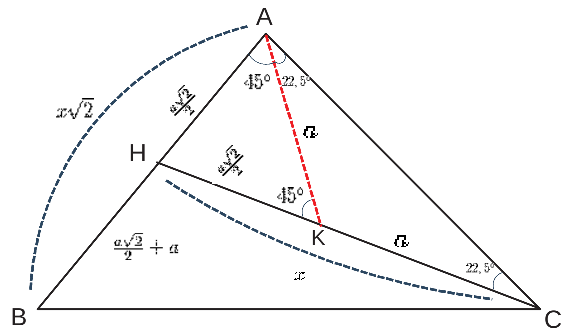
$$\begin{aligned} b = 0 \quad &, \quad a = 0 \\ b = 4 \quad &, \quad a = 1 \\ b = 8 \quad &, \quad a = 2 \\ b = 6 \quad &, \quad a = 3 \\ b = 8 \quad &, \quad a = 4 \\ b = 10 \quad &, \quad a = 5 \\ b = 12 \quad &, \quad a = 6 \\ b = 14 \quad &, \quad a = 7 \\ &\vdots \\ b = 60 \quad &, \quad a = 20 \\ &\vdots \\ b = 96 \quad &, \quad a = 24 \end{aligned}$$

olmak üzere toplam 25 tane (a, b) dolayısıyla 25 tane (a, b, c) üçlüsü vardır. Buna göre doğru cevap *(C)* şıkkıdır.

Soru 27. $S(\widehat{BAC}) = 67,5^\circ$ olan ABC üçgeninde C köşesine ait yüksekliğin ayağı H olmak üzere, $|AB| = \sqrt{2}|CH|$ ise $s(\widehat{HCB})$ kaçtır?

(a)$22,5^\circ$ (b)30° (c)$37,5^\circ$ (d)45° (e) $52,5^\circ$

Çözüm 27. Çözüme aşağıda verilen şekli takip ederek ulaşmaya çalışalım. Buna göre, önce BAC açısını 45° ve $22,5^\circ$ olacak şekilde ikiye bölen $[AK]$ doğru parçasını



çizelim. AHK üçgeni bir dik üçgen olacağından AKH açısıda 45° olacaktır. Eğer $|AH| = |HK| = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ olarak alırsak $|AK| = |KC| = a$ olacaktır. Dolayısıyla da $|HC| = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} + a$ olacaktır. Soruda $|AB| = \sqrt{2}|CH|$ eşitliği verildiğine göre $|BH|$ uzunluğuda haliyle $\dfrac{a\sqrt{2}}{2} + a$ olacaktır. Buna göre,

$$|HB| = |HC| = |HC| = \frac{a\sqrt{2}}{2} + a$$

olacağından BHC bir ikizkenar dik üçgen ve $s(\widehat{HCB}) = 45^\circ$ olacaktır. Buna göre doğru cevap *(D)* şıkkıdır.

Soru 28. $2x^2+17xy+35y^2=315$ eşitliğini sağlayan kaç (x,y) tamsayı ikilisi vardır?

(a)0 (b)2 (c)4 (d)6 (e) 8

Çözüm 28. Soruda verilen denklemi çarpanlarına ayırırsak,

$$(x+5y)(2x+7y)=315=3^2\times 5\times 7$$

eşitliğini elde ederiz. Eğer 315 sayısının bölenlerine bakarsak, örneğin

$$\begin{aligned} x+5y &= 3 \\ 2x+7y &= 105 \end{aligned}$$

denklem sistemini çözersek $(x,y)=(168,-33)$ olarak bulunacaktır. Öyleyse, soruda istenen ikililerimizn sayısı

$$(x,y)\in\{(0,\pm 3),(-240,69),(-168,33),(-24,9),(24,-9),(168,-33),(240,-69)\}$$

olmak üzere toplam 8 tane olacaktır. Buna göre doğru cevap *(E)* şıkkıdır.

Soru 29.

$$\begin{aligned} x^2 + xy &= 2y^2 \\ y^2 - xy &= 1 \end{aligned}$$

denklem sistemini sağlayan kaç (x, y) gerçel sayı ikilisi vardır?

(a)3 (b)2 (c)1 (d)0 (e) Hiçbiri

Çözüm 29. Denklem sistemini çözebilmek için iki denklemi de kullanarak değişken sayımızı bire indirgeyelim. Buna göre ikinci denklemden

$$x = \frac{y^2 - 1}{y}$$

olacaktır. Eğer bu eşitliği denklem sistemindeki birinci denklemde yerine koyarsak,

$$\left(\frac{y^2 - 1}{y}\right)^2 + \left(\frac{y^2 - 1}{y}\right) y = 2y^2$$

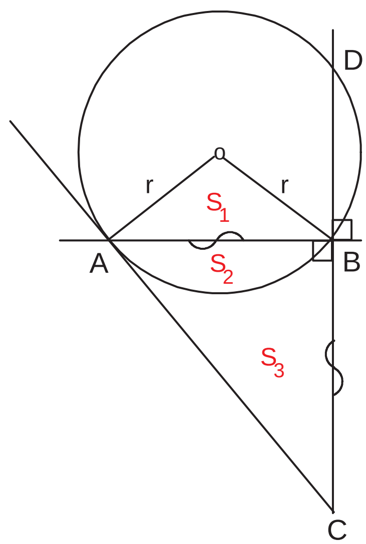
denklemini elde ederiz. Eğer bu denklemi çözersek, $y^2 = \frac{1}{3}$ olacağından $y = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ olacaktır. Burada eğer $y = +\frac{1}{\sqrt{3}}$ ise $x = -\frac{2}{\sqrt{3}}$ olarak bulunacaktır.

Benzer biçimde $y = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ olarak alınırsa $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$ olarak bulunacaktır. Buna göre soruda verilen denklem sisteminin gerçel sayılardaki (x, y) çözüm ikilisinin sayısı sadece 2 dir. Doğru cevap *(B)* şıkkıdır.

Soru 30. A ve B noktalarından geçen çembere A da teğet olan doğru ile B de dik olan doğru C de kesişiyorlar. $|AB| = |BC|$ ise ABC üçgeninin çemberin dışında kalan alanın çemberin içinde kalan alanına oranı nedir?

(a) $\frac{5\pi}{6}$ (b) $\frac{6-\pi}{\pi-2}$ (c) $\frac{2}{4-\pi}$ (d) $\frac{4}{\pi-2}$ (e) $\frac{5}{2}$

Çözüm 30. Çözüme başlamadan önce eğer şeklimizi çizersek, aşağıdaki şekli elde ederiz. Buna göre, $|AB| = |BC|$ ve $|AB| \perp |BC|$ olduğuna göre $s(\widehat{CAB}) = 45°$ olacaktır.



Teğet kiriş açı kuralına göre, $2s(\widehat{CAB}) = s(\widehat{AOB})$ olacaktır. Buna göre, çemberin içinde kalan alan $S_1 + S_2 = \frac{\pi \cdot r^2}{4}$ olacaktır. Buna göre $A(AOB) = \frac{r^2}{2}$ olduğundan

$$S_2 = \frac{\pi r^2}{4} - \frac{r^2}{2} = \frac{r^2(\pi-2)}{4}$$

olacaktır. $|AB| = r\sqrt{2}$ ise, $A(ABC) = r^2$ olacaktır. Buna göre,

$$S_2 = \frac{\pi r^2}{4} - \frac{r^2}{2} = \frac{r^2(\pi-2)}{4}$$

olacaktır. Öyleyse, istenilen oran,

$$\frac{S_3}{S_2} = \frac{\frac{r^2(6-\pi)}{4}}{\frac{r^2(\pi-2)}{4}} = \frac{6-\pi}{\pi-2}$$

olacaktır. Doğru cevap *(B)* şıkkıdır.